Concursul Naţional PANAITOPOL
14 mai 2011, Tulcea

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie numerele reale a şi b cu $a < b$ şi fie k este număr natural nenul. Considerăm două funcţii $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie continuă pe $[a, b]$, funcţia g să fie derivabilă pe $[a, b]$ şi $g'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in (a, b)$. Să se arate că există $c \in (a, b)$ astfel încât:

$$f(c) = \frac{(g(a) + g(b) - 2g(c))\, g'(c)}{k\,(g(c) - g(a))\,(g(c) - g(b))}.$$

Problema 2. Pentru orice număr $u \in \mathbb{C}$ notăm $\mathbb{Q}[u] = \{\, f(u) \mid f \in \mathbb{Q}[X]\}$.

a) Să se arate că mulţimea $\mathbb{Q}[u]$ este inel comutativ faţă de adunarea şi înmulţirea uzuală a numerelor complexe.

b) Să se demonstreze că inelul $\mathbb{Q}[u]$ este corp dacă şi numai dacă există un polinom nenul $f \in \mathbb{Q}[X]$ astfel încât $f(u) = 0$.

Problema 3. Să se arate că pentru orice $x > 0$ real avem $\displaystyle\int_0^x \sin e^t dt > 0$.

Laurenţiu Panaitopol

Problema 4. Fie $f = X^5 + a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ un polinom cu coeficienţi întregi. Să se arate că există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât 2011 nu divide $f(x) - k$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

Problema 1. [*Petre Guţescu*]

Fie numerele reale a şi b cu $a < b$ şi fie k este număr natural nenul. Considerăm două funcţii $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie continuă pe $[a, b]$, funcţia g să fie derivabilă pe $[a, b]$ şi $g'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in (a, b)$. Să se arate că există $c \in (a, b)$ astfel încât:

$$f(c) = \frac{(g(a) + g(b) - 2g(c))\, g'(c)}{k\,(g(c) - g(a))\,(g(c) - g(b))}.$$

Soluţie. Deoarece f este continuă rezultă că funcţia $F : [a, b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ este o primitivă a lui f.

Considerăm funcţia $h : [a, b] \to \mathbb{R}, h(x) = (g(x) - g(a))\,(g(x) - g(a))\, e^{kF(x)}$, care este evident funcţie Rolle pe intervalul $[a, b]$. Cum $h(a) = h(b)$, aplicând teorema lui Rolle, există $c \in (a, b)$ astfel încât $h'(c) = 0$. Cum

$$h'(x) = g'(x)\,(2g(x) - g(a) - g(b))\, e^{kF(x)} + (g(x) - g(a))\,(g(x) - g(b))\, kf(x)e^{kF(x)},$$

cerinţa este demonstrată.

Problema 2. [*Toma Albu*]

Pentru orice număr $u \in \mathbb{C}$ notăm $\mathbb{Q}[u] = \{\, f(u) \mid f \in \mathbb{Q}[X]\}$.

a) Să se arate că mulţimea $\mathbb{Q}[u]$ este inel comutativ faţă de adunarea şi înmulţirea uzuală a numerelor complexe.

b) Să se demonstreze că inelul $\mathbb{Q}[u]$ este corp dacă şi numai dacă există un polinom nenul $f \in \mathbb{Q}[X]$ astfel încât $f(u) = 0$.

Soluţie. a) Se verifică axiomele inelului.

b) Dacă inelul $\mathbb{Q}[u]$ este corp, atunci există $g \in \mathbb{Q}[X]$ astfel ca $ug(u) = 1$. Atunci $f = Xg - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ verifică $f(u) = 0$, ceea ce demonstreză implicaţia directă.

Reciproc, fie $f \in \mathbb{Q}[X]$ minimal cu $f(u) = 0$. Evident f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$. Fie $\alpha \in \mathbb{Q}[u]$ nenul; există $g \in \mathbb{Q}[X]$ nenul cu $\alpha = g(u)$. Cum $(f, g) = 1$ în $\mathbb{Q}[X]$, există $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ cu $fP + gQ = 1$. Reultă $g(u)Q(u) = 1$ sau $\alpha Q(u) = 1$, adică α este element inversabil.

Problema 3. [**Laurenţiu Panaitopol**]

Să se arate că pentru orice $x > 0$ real avem $\displaystyle\int_0^x \sin e^t dt > 0$.

Soluţie. Fie $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin e^t dt, x \in [0, \infty)$. Funcţia f este derivabilă, având derivata $f'(x) = \sin e^x, x \geqslant 0$. Punctele critice sunt $x_n = \ln n\pi$; din studiul semnului derivatei rezultă că punctele de minim local sunt $x_{2n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Vom arăta că $f(x_{2n}) < f(x_{2n+2})$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Avem evaluarea

$$\begin{aligned}
f(x_{2n+2}) - f(x_{2n}) &= \int_{\ln 2n\pi}^{\ln(2n+2)\pi} \sin e^t dt \overset{u=e^t}{=} \\
&= \int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin u}{u} du = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin u}{u} du + \\
&+ \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin u}{u} du \overset{u=\pi+z}{=} \\
&= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin u}{u} du + \int_{(2n)\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{-\sin z}{z+\pi} du = \\
&= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\pi \sin u}{u(u+\pi)} du > 0.
\end{aligned}$$

În plus, $f(x_2) = \displaystyle\int_0^{\ln 2\pi} \sin e^t dt > 0$, cu aceleaşi argumente ca mai sus.

În concluzie, minimele sunt $0 = f(0) < f(x_2) < \cdots < f(x_{2n}) < \cdots$, deci $f(x) \geqslant 0$, oricare ar fi $x \geqslant 0$. Cum egalitatea are loc doar pentru $x = 0$, rezultă cerinţa.

Problema 4. [*Marian Andronache*]

Fie $f = X^5 + a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ *un polinom cu coeficienţi întregi. Să se arate că există* $k \in \mathbb{Z}$ *astfel încât* 2011 *nu divide* $f(x) - k$*, oricare ar fi* $x \in \mathbb{Z}$.

Soluţie. Fie $\hat{f} = X^5 + \hat{a_4}X^4 + \hat{a_3}X^3 + \hat{a_2}X^2 + \hat{a_1}X + \hat{a_0} \in \mathbb{Z}_{2011}[X]$ şi $g = \hat{f}^{402} = X^{2010} + b_{2009}X^{2009} + \cdots + b_1X + b_0 \in \mathbb{Z}_{2011}[X]$.

Dacă funcţia polinomială F a lui $\hat{f}$ este bijectivă, atunci

$$\sum_{a\in\mathbb{Z}_{2011}} g(a) = \sum_{a\in\mathbb{Z}_{2011}} \hat{f}^{402}(a) = \sum_{a\in\mathbb{Z}_{2011}} a^{402} = \hat{0}. \tag{1}$$

Pe de altă parte

$$\sum_{a\in\mathbb{Z}_{2011}} g(a) = \sum_{a\in\mathbb{Z}_{2011}} a^{2010} + \sum_{j=0}^{2009} b_j \sum_{a\in\mathbb{Z}_{2011}} a^j = \widehat{2010} = -\hat{1},$$

fals. În consecinţă F nu este surjectivă, deci există k întreg astfel ca $\hat{f}(a) \neq \hat{k}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}_{2011}$, de unde rezultă cerinţa.

Notă. Numărul 2011 este prim.