Colegiul Naţional "Mircea cel Bătrân" Constanţa

Concursul Naţional de Matematică "N. N. Mihăileanu"

Ediţia a XII-a, 26-28 mai 2011

Proba individuală

Clasa a X-a

Subiectul 1

a) Să se arate că 2010^2 divide $2009 \cdot 2011^{2011} + 1$

Gabriel Iorgulescu, Constanţa

b) Fie a, b, n numere naturale cu proprietatea că $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = \left(a+b\sqrt{2}\right)^2$. Să se arate că n este număr par.

Marius Cavachi, Constanţa

Subiectul 2

Fie $x, y, z > 1$ astfel încât $xyz = 8$. Arătaţi că

$$\left(\sqrt{\log_2 x} + \sqrt{\log_2 y}\right) \cdot \left(\sqrt{\log_2 y} + \sqrt{\log_2 z}\right) \cdot \left(\sqrt{\log_2 z} + \sqrt{\log_2 x}\right) \le 8$$

Gabriela Constantinescu, Constanţa

Subiectul 3

Să se determine $\min\limits_{z \in \mathbf{C}} \left(\left|z^2 + z + 1\right| + \left|z^2 - z + 1\right| \right)$.

Gheorghe Andrei, Doru Constantin Caragea; Constanţa

Subiectul 4

Pe laturile unui patrulater convex *ABCD* se construiesc, în exterior, triunghiurile *MAB*, *NBC*, *PCD* şi *QDA* asemenea între ele.

a) Să se arate că dacă *MNPQ* este paralelogram, atunci *ABCD* este paralelogram.

b) Să se arate că dacă *MNPQ* are diagonalele congruente şi perpendiculare, atunci *ABCD* are diagonalele congruente şi perpendiculare sau triunghiul *MAB* este dreptunghic isoscel.

Nelu Chichirim, Constanţa

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.