Colegiul Naţional "Mircea cel Bătrân" Constanţa

Concursul Naţional de Matematică "N. N. Mihăileanu"

Ediţia a XII-a, 26-28 mai 2011

Proba individuală

Clasa a XI-a

Subiectul 1

Fie $A, B, C, D \in M_n(\mathbf{C})$ şi $p, q \in \mathbf{C}$ cu proprietatea că $A+B=C+D=p\cdot I_n$, $AB+CD=q\cdot I_n$ şi $ABCD=O_n$. Să se arate că $BCDA=O_n$.

Marius Cavachi, Constanţa

Subiectul 2

Se considera o matrice $A\in M_k(\mathbf{R})$, unde $k\in \mathbf{N}$, $k\geq 2$, cu proprietatea $\det\left(I_k-\frac{1}{n^2}\cdot A^2\right)+1\geq \det\left(I_k-\frac{1}{n}\cdot A\right)+\det\left(I_k+\frac{1}{n}\cdot A\right)$, $\forall n\in \mathbf{N}^*$. Arătaţi că urma matricei A este egală cu zero.

Nelu Chichirim, Constanţa

Subiectul 3

Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $f\left(f(x)\right)=f(x)-\frac{1}{4}x+1,\ \forall x\in\mathbf{R}$.

a) Demonstraţi că f este strict crescătoare.
b) Arătaţi că pentru orice $a\geq 1$, ecuaţia $f(x)=ax$ are cel puţin o rădăcină reală.
c) Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(f(x)\right)=\infty$, calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ ştiind că aceasta există şi este finită.

* * *

Subiectul 4

Fie $f:\mathbf{R}\setminus\left\{k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\right\}\to\mathbf{R},\ f(x)=x+ctgx$.

a) Să se arate că ecuaţia $f(x)=0$ are o singură rădăcină reală în intervalul $\left(\frac{(2n+1)\pi}{2},\ (n+1)\pi\right)$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$.
b) Dacă notăm cu x_n rădăcina de la punctul a), arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{(n+1)\pi}\right)^{n^2}=e^{-\frac{1}{\pi^2}}$.

Cătălin Zîrnă, Constanţa

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.