Colegiul Naţional "Mircea cel Bătrân" Constanţa

Concursul Naţional de Matematică "N. N. Mihăileanu"

Ediţia a XII-a, 26-28 mai 2011

Proba individuală

Clasa a XII-a

Subiectul 1

Pe mulţimea $A \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ definim legile $x * y = x^{2\log_3 y}$ şi $x \circ y = x^{3\log_2 y}$. Fie $G_1 = (A, *)$ şi $G_2 = (A, \circ)$. Arătaţi că G_1 şi G_2 sunt grupuri izomorfe. Este unic izomorfismul ?

Gabriel Iorgulescu, Constanţa

Subiectul 2

Fie polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$ cu proprietatea că $f(0) = 0$ şi $f\left(X^2 - X + 1\right) = f^2(X) - f(X) + 1$.

a) Arătaţi că $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

b) Determinaţi toate polinoamele *f* cu proprietatea dată.

Nelu Chichirim, Constanţa

Subiectul 3

Fie $n \geq 2$ un număr natural. Să se arate că $0 < n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) < \frac{1}{2n}$.

Marius Cavachi, Constanţa

Subiectul 4

Fie şirul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^{2n} + 1}} dx, n \in \mathbf{N}^*$.

a) Arătaţi că şirul $(I_n)_n$ este convergent către 0.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot I_n$

c) Arătaţi că şirul $K_n = n(L - nI_n)$ este convergent, unde $L = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot I_n$

* * *

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.