Colegiul Naţional "Mircea cel Bătrân" Constanţa

Concursul Naţional de Matematică "N. N. Mihăileanu"

Ediţia a XII-a, 26-28 mai 2011

Proba individuală

Clasa a VII-a

Subiectul 1

a) Arătaţi că $(3x+2y)^2+(2x-3y)^2=13(x^2+y^2)$, oricare ar fi numerele reale x şi y.

b) Fie $m, n \in \mathbf{N}$. Demonstraţi echivalenţa: 13^m+13^n se poate scrie ca sumă a două pătrate perfecte, dacă şi numai dacă m şi n au aceeaşi paritate.

Nelu Chichirim, Constanţa

Subiectul 2

În triunghiul ABC, BM este mediană şi AD $(D \in BC)$, bisectoarea unghiului BAC. Paralela prin M la AD taie BC în E, iar F este mijlocul lui BM. Arătaţi că bisectoarea unghiului BME este perpendiculară pe EF dacă şi numai dacă $AD = BM$.

Gabriela Constantinescu, Constanţa

Subiectul 3

Fie A şi B două puncte fixe în plan şi M un punct variabil care nu aparţine dreptei AB. Se consideră punctele N şi P astfel încât $N, P \in AM$, $P \in (MA$ şi $MN = MP = BM$. Bisectoarea unghiului AMB intersectează paralela prin P la AB în Q. Să se arate că dreapta NQ trece printr-un punct fix (punct care nu depinde de poziţia lui M).

Cătălin Zîrnă, Constanţa

Subiectul 4

Fie numerele naturale $m, n \geq 2$ şi A o submulţime cu m elemente a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n^2\}$ cu proprietatea că produsul oricăror două numere din A este pătrat perfect. Să se arate că $m \leq n$.

Marius Cavachi, Constanţa

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.