Colegiul Naţional “Mircea cel Bătrân” Constanţa

Concursul Naţional de Matematică “N. N. Mihăileanu”

Ediţia a XII-a, 26-28 mai 2011

Proba individuală

Clasa a VIII-a

Subiectul 1

a) Fie numerele $a=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$, $b=\left|1-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-2\right|$, $c=-\sqrt{(-5)^2}$. Arătaţi că $2\left(a^4+b^4+c^4\right)$ este pătrat perfect.

b) Arătaţi că dacă $a,b,c\in\mathbf{Z}$, astfel încât $a+b+c=0$, atunci $2\left(a^4+b^4+c^4\right)$ este pătrat perfect.

Cătălin Zîrnă, Constanţa

Subiectul 2

Fie a, b, $c\in\mathbf{R}^*$, astfel încât $a^4+b^4+c^4=1$. Arătaţi că:

a) $(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4<\frac{1}{2}$ **b)** $(ab)^5+(bc)^5+(ca)^5<\frac{1}{4}$

Gabriela Constantinescu (prelucrare RMT), Constanţa

Subiectul 3

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de latură $AB=a$, şi E simetricul lui C faţă de A.

a) Demonstraţi că $B'D\perp(EAD')$.

b) Dacă $F\in(ED')$, astfel încât $CF=2a$, calculaţi măsura unghiului AFC.

Florian Gache, Constanţa

Subiectul 4

Fie piramida triunghiulară $VABC$. Se consideră punctele mobile $M\in(VA)$, $N\in(VB)$, $P\in(VC)$.

a) Demonstraţi că $\frac{V[VMNP]}{V[VABC]}=\frac{VM}{VA}\cdot\frac{VN}{VB}\cdot\frac{VP}{VC}$, unde $V[VABC]$ şi $V[VMNP]$ sunt volumele piramidelor $VABC$ şi $VMNP$

b) Dacă $\frac{AM}{MV}+\frac{BN}{NV}+\frac{CP}{PV}=1$, arătaţi că planul (MNP) trece printr-un punct fix.

* * *

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.