Colegiul Naţional "Mircea cel Bătrân" Constanţa

Concursul Naţional de Matematică "N. N. Mihăileanu"

Ediţia a XII-a, 26-28 mai 2011

Proba individuală

Clasa a IX-a

Subiectul 1

Se consideră ecuaţia $ax^2+bx+c=0$, $a,b,c\in \mathbf{R}$, $a\neq 0$ astfel încât $|a+c|<|b|$.

- **a)** Demonstraţi că ecuaţia are două rădăcini reale distincte.
- **b)** Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile, arătaţi că $x_1\in(-1,\,1)$ şi $x_2\in(-\infty,\,-1)\cup(1,\,\infty)$.

***

Subiectul 2

Determinaţi $x,\ y,\ z\in(0,\,1)$ astfel încât să fie îndeplinite condiţiile:

i) $x+y+z=1$;

ii) $\sqrt{\dfrac{x(1-y^2)}{2}}+\sqrt{\dfrac{y(1-z^2)}{2}}+\sqrt{\dfrac{z(1-x^2)}{2}}=\sqrt{1+xy+yz+zx}$.

Gabriela Constantinescu, Constanţa

Subiectul 3

Fie $a,\ b,\ c>0$ cu proprietatea că $ab+bc+ca=1$. Demonstraţi că $\dfrac{b^3c}{a^2+b^2}+\dfrac{c^3a}{b^2+c^2}+\dfrac{a^3b}{c^2+a^2}\geq\dfrac{1}{2}$.

Nelu Chichirim, Constanţa

Subiectul 4

In triunghiul ABC notăm cu I centrul cercului înscris, cu a, b, c lungimile laturilor BC, AC respectiv AB şi cu r raza cercului înscris.

- **a)** Să se calculeze, în funcţie de a, b şi c, $\dfrac{BD}{DC}$, unde D este punctul de tangenţă al cercului înscris în triunghiul ABC cu latura BC.
- **b)** Să se arate că $a\cdot\overrightarrow{IA}+b\cdot\overrightarrow{IB}+c\cdot\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.
- **c)** Să se arate că dacă $E\in BC$ astfel încât $AE\perp BC$ şi $M\in(AE)$, $AM=r$, atunci dreapta MI trece prin mijlocul laturii BC.

Cătălin Zîrnă, Constanţa

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.