



Colegiul Național "Mircea cel Bătrân" Constanța

Concursul Național de Matematică "N. N. Mihăileanu"

Ediția a XII-a, 26-28 mai 2011

Proba individuală

Clasa a IX-a

Subiectul 1

Se consideră ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ astfel încât $|a + c| < |b|$.

- Demonstrați că ecuația are două rădăcini reale distincte.
- Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile, arătați că $x_1 \in (-1, 1)$ și $x_2 \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Subiectul 2

Determinați $x, y, z \in (0, 1)$ astfel încât să fie îndeplinite condițiile:

i) $x + y + z = 1$;

ii) $\sqrt{\frac{x(1-y^2)}{2}} + \sqrt{\frac{y(1-z^2)}{2}} + \sqrt{\frac{z(1-x^2)}{2}} = \sqrt{1+xy+yz+zx}$.

Gabriela Constantinescu, Constanța

Subiectul 3

Fie $a, b, c > 0$ cu proprietatea că $ab + bc + ca = 1$. Demonstrați că $\frac{b^3c}{a^2+b^2} + \frac{c^3a}{b^2+c^2} + \frac{a^3b}{c^2+a^2} \geq \frac{1}{2}$.

Nelu Chichirim, Constanța

Subiectul 4

În triunghiul ABC notăm cu I centrul cercului înscris, cu a, b, c lungimile laturilor BC, AC respectiv AB și cu r raza cercului înscris.

- Să se calculeze, în funcție de a, b și c , $\frac{BD}{DC}$, unde D este punctul de tangență al cercului înscris în triunghiul ABC cu latura BC .
- Să se arate că $a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
- Să se arate că dacă $E \in BC$ astfel încât $AE \perp BC$ și $M \in (AE)$, $AM = r$, atunci dreapta MI trece prin mijlocul laturii BC .

Cătălin Zîrnă, Constanța

Notă. Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.