

CLASA a VI-a

Problema 1. Determinați cifrele a, b, c, m, n, p pentru care:

$$\overline{0,(\overline{abc})} \cdot \overline{1,(\overline{mnp})} = 1.$$

Soluție. Egalitatea din enunț este echivalentă cu $\overline{abc} \cdot (999 + \overline{mnp}) = 37^2 \cdot 3^6$.

Deoarece $37^2 = 1369 > \overline{abc}$, sunt posibile două cazuri:

a) Dacă $37 | \overline{abc}$, atunci $\overline{abc} = 37 \cdot 3^k$, $k \leq 2$ (pentru $k \geq 3$ s-ar obține $\overline{abc} \geq 999$, imposibil).

Atunci $\overline{abc} \leq 333$, de unde $999 + \overline{mnp} \geq 2997$, imposibil.

b) Dacă $37 \nmid \overline{abc}$, atunci $\overline{abc} = 3^k$, $k \leq 6$.

Cum $999 + \overline{mnp} \leq 999 + 998 = 1997$, rezultă $\overline{abc} \geq \frac{999^2}{1997}$, deci $\overline{abc} \geq 500$.

Ca urmare $\overline{abc} = 3^6 = 729$, pentru care se obține $\overline{mnp} = 370$.

Problema 2. Considerăm numerele naturale nenule a, b și c astfel încât

$$(a + 1)^b = (a + 25)^c.$$

Demonstrați că $b + c$ este multiplu de 4.

Soluție. Este evident că $b > c$, deci putem scrie $(a + 25)^c = (a + 1)^c \cdot (a + 1)^{b-c}$, de unde $(a + 1)^c | (a + 25)^c$, adică $a + 1 | a + 25$.

Obținem $a + 1 | 24$, deci $a \in \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 23\}$.

Dacă $a = 1$, atunci obținem $2^b = 2^c 13^c$ – imposibil.

Dacă $a = 2$ obținem $3^b = 27^c$, de unde $b = 3c$, $c \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $a = 3$, atunci obținem $4^b = 4^c 7^c$ – imposibil.

Dacă $a = 5$, atunci obținem $2^b 3^b = 2^c 3^c 5^c$ – imposibil.

Dacă $a = 7$, obținem $8^b = 32^c$, de unde $b = 5k$, $c = 3k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $a = 11$, atunci obținem $2^{2b} 3^b = 2^{2c} 3^{2c}$ – imposibil (ar trebui $b = c$ și $b = 2c$).

Dacă $a = 23$, atunci obținem $2^{3b} 3^b = 2^{4c} 3^c$ – imposibil (ar trebui $b = c$ și $3b = 4c$).

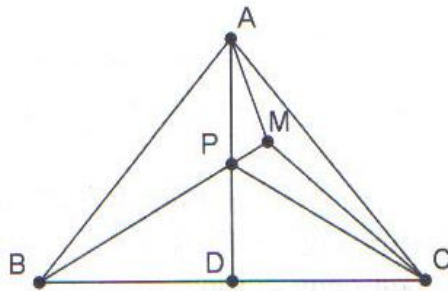
În ambele cazuri posibile, $b + c$ este multiplu de 4.

Problema 3. Triunghiul isoscel ABC de bază BC are $m(\angle B) > 30^\circ$. În interiorul triunghiului considerăm punctul M așa încât $m(\angle MBC) = 30^\circ$ și $m(\angle MAB) = \frac{3}{4}m(\angle BAC)$. Determinați măsura unghiului $\sphericalangle AMC$.

Soluție. Construim bisectoarea (AD a unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in (BC)$ și notăm $\{P\} = AD \cap BM$.

Cum triunghiul ABC este isoscel, ($AB = AC$), rezultă că AD este mediatoarea segmentului $[BC]$. În consecință, triunghiul BPC este isoscel și $m(\angle BPD) = m(\angle DPC) = 60^\circ$. De aici, $m(\angle APM) = m(\angle CPM) = 60^\circ$.

Din $m(\angle BAM) = \frac{3}{4}m(\angle BAC)$, obținem $m(\angle PAM) = m(\angle MAC) = \frac{1}{4}m(\angle BAC)$.



Așadar, (AM și (PM sunt bisectoarele unghiurilor PAC și APC din triunghiul APC , de unde rezultă că (CM este bisectoarea unghiului $\angle PCA$.

Din triunghiul MAC obținem

$$\begin{aligned} m(\angle AMC) &= 180^\circ - \frac{1}{2}(m(\angle PAC) + m(\angle PCA)) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 150^\circ. \end{aligned}$$

Problema 4. a) Arătați că este posibil să așezăm pe un rând 20 de numere întregi nenule (nu neapărat diferite) cu suma strict pozitivă, astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie strict negativă.

b) Demonstrați că nu se pot așeza pe un cerc 20 de numere întregi cu suma strict pozitivă astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie strict negativă.

Soluție. a) Un exemplu este:

$$17, -9, -9, 17, -9, -9, \dots, 17, -9, -9, 17, -9.$$

b) Presupunem că numerele a_1, a_2, \dots, a_{20} sunt așezate pe cerc în această ordine, în sensul mișcării acelor de ceasornic, a_1 fiind cel mai mare număr.

Dacă $a_1 < 0$, atunci toate numerele sunt negative, deci suma lor este negativă.

Dacă $a_1 > 0$, atunci $a_2 + a_3 < 0$, deci

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \dots + (a_{19} + a_{20} + a_1) < 0.$$