Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,

Reşiţa, 25-27 martie 2011

Clasa a V-a

1. Aflaţi suma tuturor cifrelor care apar în scrierea numerelor 1, 2, 3, $\ldots, 10^n - 1$.
2. Arătaţi că nu există niciun număr natural care să se mărească de 7 sau de 9 ori prin mutarea primei cifre la sfârşit.
3. Arătaţi că, oricum am alege 7 numere naturale nenule distincte mai mici sau egale cu 126, printre ele se vor afla două astfel încât cel mai mare dintre ele să fie mai mic sau egal cu dublul celui mai mic.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv 2 ore.*

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică
"Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011
Barem de corectare pentru clasa a V-a

Subiectul 1.

- Oficiu 1p
- Adaugă 0 în şir 1p
- Grupează numerele în perechi de forma $(a, 10^n - 1 - a)$ 3p
- Observă că suma cifrelor din fiecare pereche este $9n$ 3p
- Calculează numărul perechilor ca fiind $\frac{10^n}{2}$ 1p
- Suma totală este $9n\frac{10^n}{2}$ 1p

Subiectul 2.

- Oficiu 1p
- În primul caz, prima cifră este 1 .... 0,75p
- Atunci $\overline{1xy\ldots zt} \cdot 7 = \overline{xy\ldots zt1}$, deci $t = 3$ 1p
- $\overline{1xy\ldots z3} \cdot 7 = \overline{xy\ldots z31}$, deci $z = 3$ 1p
- Toate cifrele numărului căutat sunt egale cu 3 .... 1,25p
- Prima cifră a numărului este 1, deci nu există astfel de numere 0,5p
- În cel de-al doilea caz prima cifră este 1 .... 0,75p
- Are loc $\overline{1xy\ldots zt} \cdot 9 = \overline{xy\ldots zt1}$, deci $t = 9$ 1p
- $\overline{1xy\ldots z9} \cdot 9 = \overline{xy\ldots z91}$, deci $z = 9$ 1p

- Toate cifrele numărului căutat sunt egale cu 9 .... 1,25p
- Prima cifră a numărului este 1, deci nu există astfel de numere . . 0,5p

Subiectul 3.

- Oficiu 1p
- Împarte mulţimea $\{1, 2, \ldots, 126\}$ în submulţimi disjuncte astfel încât fiecare element al unei submulţimi să fie de cel mult 2 ori mai mare ca oricare alt element al aceleiaşi submulţimi 4p
- Submulţimile căutate sunt $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$, $\{7, \ldots, 14\}$, $\{15, \ldots 30\}$, $\{31, \ldots, 62\}$, $\{63, \ldots, 126\}$ 3p
- Oricum am alege 7 numere din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 126\}$, cel puţin două vor fi în aceeaşi submulţime 2p

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,

Reşiţa, 25-27 martie 2011

Clasa a VI-a

1. Arătaţi că nu există nici un număr natural care să se mărească de 2, 5, 6 sau 8 ori prin mutarea primei cifre la sfârşitul numărului.

2. **a)** Determinaţi numerele strict pozitive a şi b astfel încât
$$a^n + b^n = a^{n+1} + b^{n+1} = a^{n+2} + b^{n+2},$$
pentru un număr natural $n \geq 2$ fixat.

   b) Dacă a, b şi c sunt numere naturale având-l pe 1 drept cel mai mare divizor comun şi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, arătaţi că $a + b$, $a - c$ şi $b - c$ sunt pătrate perfecte.

3. Fie $\widehat{POQ}$ un unghi ascuţit şi $B \in (OQ$. Construim din B o perpendiculară pe OP care intersectează această dreaptă în A. Punctul C este ales astfel încât triunghiul ABC să fie echilateral, iar O şi C să nu fie de aceeaşi parte a dreptei AB. Fie D simetricul lui C faţă de OP şi $M \in (OQ$ astfel încât $[OC] \equiv [OM]$. Ştiind că $m(\widehat{POC}) = \frac{1}{3}m(\widehat{POQ})$,

   a) arătaţi că $[AD] \equiv [CM]$;

   b) calculaţi $m(\widehat{POQ})$.

4. Un gardian deschide pe rând toate celulele unei închisori, care sunt aşezate în linie dreaptă. Apoi, el închide celulele cu numarul 2, 4, 6 ş. a. m. d. După aceea, luând celulele din 3 în 3, răsuceşte cheia în broasca acestor celule, închizându-le pe cele deschise şi deschizându-le pe cele închise. El continuă în acest fel, la pasul i luând celulele i, $2i$, $3i$, ..., şi răsucind cheia în broasca lor. Deţinutii ale căror celule au rămas deschise după efectuarea tuturor operaţiilor posibile de acest fel sunt puşi în libertate.

   Să se arate că deţinuţii eliberaţi vor fi cei din celulele având numărul de ordine un pătrat perfect. (Fiecare operaţie începe din dreptul primei celule.)

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv 3 ore.*

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică

"Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011
Barem de corectare pentru clasa a VI-a

Subiectul 1.

- Oficiu 1p
- Arată că prima cifră poate fi doar 1, dar prin mutarea acesteia la sfârşitul numărului, acesta nu este multiplu de 5, deci nu există astfel de numere 1p
- Arată că prima cifră poate fi doar 1, dar prin mutarea acesteia la sfârşitul numărului, acesta nu este multiplu de 6, deci nu există astfel de numere 1p
- Arată că prima cifră poate fi doar 1, dar prin mutarea acesteia la sfârşitul numărului, acesta nu este multiplu de 8, deci nu există astfel de numere 1p
- În cazul numărului care se dublează, prima cifră este 2 sau 4 ...... 1p
- Dacă prima cifră este 2, atunci $\overline{2xy\dots zt}\cdot 2=\overline{xy\dots zt2}$ şi t este 1 sau 6 .... 1p
- Dacă $t=1$, atunci $\overline{2xy\dots z1}$ este impar, iar $\overline{xy\dots z12}$ este multiplu de 4, contradicţie 0,75p
- Dacă $t=6$, atunci $\overline{2xy\dots z6}\cdot 2=M_4$, iar $\overline{xy\dots 62}\neq M_4$, contradicţie 0,75p
- Dacă prima cifră este 4, atunci $\overline{4xy\dots zt}\cdot 2=\overline{xy\dots zt4}$, deci t este 2 sau 7 .... 1p

- Dacă $t = 2$, $\overline{4xy\ldots z2} \cdot 2 = \overline{xy\ldots z24}$ şi z este 1 sau 6. În primul caz, $\overline{4xy\ldots 12} \cdot 2 = M_8$ şi $\overline{xy\ldots 124} \neq M_8$. În al doilea caz, $\overline{4xy\ldots 62} \cdot 2 \neq M_8$ şi $\overline{xy\ldots 624} = M_8$ 0,75p

- Dacă $t = 7$, $\overline{4xy\ldots z7} \cdot 2 = \overline{xy\ldots z74}$ şi z este 3 sau 8. Arată că în ambele cazuri nu există astfel de numere 0,75p

Subiectul 2.

- Oficiu 1p

- a) Observă că $a^{n+2} + b^{n+2} = (a+b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n)$ ... 1p

- Notează $x = a^n + b^n$ şi observă că $x = (a+b)x - abx$, deci $(a-1)(b-1) = 0$ 1p

- Dacă $a = 1$, atunci $b = 1$ şi invers 1p

- b) Arată că a, b, c - distincte 1p

- Presupune $a > b > c \Rightarrow \dfrac{3}{a} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < \dfrac{3}{c} \Rightarrow c < 3$ 1p

- $c = 1$ nu convine 0,5p

- Pentru $c = 2$ rezultă $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2}$. Atunci $\dfrac{2}{a} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} < \dfrac{2}{b}$, de unde $b = 3$, deci $a = 6$ 2,5p

- Soluţia $a = 6$, $b = 3$, $c = 2$ verifică condiţia problemei 1p

Subiectul 3.

- Oficiu 1p

- Figura 1p

- a) ΔADC este echilateral, $\Delta ADC \equiv \Delta ABC$ şi $[AD] \equiv [DC] \equiv [AC] \equiv [AB] \equiv [CB]$ (1) 1p

- ΔDOC este isoscel şi $m(\widehat{DOC}) = 2x$, unde $x = m(\widehat{POC})$ 1p

- $\Delta DOC \equiv \Delta MOC$, deci $[DC] \equiv [CM]$ (2) 1p

- Din (1), (2) rezultă că $[AD] \equiv [CM]$ 0,5p
- b) $[CB] \equiv [CM]$, deci $m(\widehat{CBM}) = m(\widehat{CMB})$ (3) 1p
- $m(\widehat{CMB}) = m(\widehat{OCM}) = \frac{180^\circ - 2x}{2} = 90^\circ - x$ (4) 1p
- $\widehat{CBM}$ este exterior ΔOBC, deci $m(\widehat{CBM}) = 30^\circ + 3x$ (5) 1,5p
- Din (3), (4) şi (5) rezultă că $x = 15^\circ$, deci $m(\widehat{POQ}) = 45^\circ$ 1p

Subiectul 4.

- Oficiu 1p
- Celula q a fost închisă şi deschisă în total de m ori, unde m este numărul divizorilor lui q 3p
- Celula q rămâne deschisă dacă m este un număr impar 2p
- Un număr are numărul divizorilor impar dacă şi numai dacă este pătrat perfect 3p
- Finalizare 1p

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”, Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

Subiecte pentru clasa a VII-a

1. Arătaţi că numărul $\sqrt{26}+\sqrt{3}+\sqrt{2011}$ este iraţional.

2. Fie $\Delta\, ABC$ un triunghi ascuţitunghic, I centrul cercului său înscris, iar $R \in (BC)$ un punct cu proprietatea că $\widehat{ARB} \equiv \widehat{IRC}$. Arătaţi că

$$AR \cdot BC = IR \cdot (AB + AC + BC)\,.$$

3. a) Arătaţi că ecuaţia $x^2 + y^2 = 2011$ nu admite soluţii în mulţimea numerelor întregi.
b) Care dintre ecuaţiile $x^2 + 2011^2 = y^2$ şi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2011}$ are mai multe soluţii în mulţimea numerelor întregi? Justificaţi.

4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, iar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ puncte în plan, necoliniare câte trei. Unele dintre puncte sunt unite prin segmente. Notăm cu s_i numărul de segmente având un capăt în punctul A_i. Arătaţi că există două puncte A_i şi A_j, astfel încât $s_i = s_j$.

Notă: Timp de lucru - 3 ore

Concursul interjudeţean de matematică
"Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011

Barem de corectare a soluţiilor la clasa a VII-a

1.

start	$1\,p$
notează $\sqrt{26}+\sqrt{3}+\sqrt{2011}=r$ şi presupune $r\in\mathbb{Q}$	$1\,p$
scrie $r-\sqrt{2011}=\sqrt{26}+\sqrt{3}$	$2\,p$
ridică la pătrat şi obţine că $r\sqrt{2011}+\sqrt{78}=\frac{r^2+1982}{2}\in\mathbb{Q}$	$3\,p$
ridică la pătrat şi obţine că $2r\sqrt{78\cdot 2011}\in\mathbb{Q}$	$1\,p$
deduce că $\sqrt{26\cdot 3\cdot 2011}\in\mathbb{Q}$, contradicţie	$1\,p$
obţine că $\sqrt{26}+\sqrt{3}+\sqrt{2011}\notin\mathbb{Q}$	$1\,p$
Total	**10 p**

2.

start	$1\,p$
duce $AA_1\perp BC$, $II_1\perp BC$, cu $A_1, I_1\in(BC)$	$1\,p$
arată că $\Delta\, AA_1R\sim\Delta\, II_1R$	$1\,p$
deduce că $\frac{AR}{IR}=\frac{AA_1}{II_1}$ (1)	$1\,p$
folosind $AA_1\parallel II_1$ deduce că $\Delta\, AA_1P\sim\Delta\, II_1P$, unde $P\in(BC)\cap AI$	$1\,p$
obţine că $\frac{AA_1}{II_1}=\frac{AP}{IP}$ (2)	$1\,p$
cu teorema bisectoarei în $\Delta\, ABC$ obţine $\frac{AB}{BP}=\frac{AB+AC}{BC}$ (3)	$1\,p$
cu teorema bisectoarei în $\Delta\, ABP$ obţine $\frac{AP}{IP}=\frac{AB+BP}{BP}$ (4)	$1\,p$
din (1) − (4) obţine concluzia	$2\,p$
Total	**10 p**

3.

start	$1\,p$
a) arată că $a^2\in 4\mathbb{Z}\cup 4\mathbb{Z}+1$, $(\forall)a\in\mathbb{Z}$	$1\,p$
deduce că $x^2+y^2\in\mathbb{Z}\setminus(4\mathbb{Z}+3)$	$1\,p$
arată că $2011\in 4\mathbb{Z}+3$ şi trage concluzia	$1\,p$
b) pentru ecuaţia $x^2+2011^2=y^2$ observă că	
$(x,y)-$soluţie $\Longrightarrow(\pm x,\pm y)-$soluţii	$0,5\,p$
pentru $(x,y)\in\mathbb{N}$ transcrie $(y-x)(y+x)=2011^2$	$0,5\,p$
obţine că $(y-x,y+x)\in\{(1,2011^2),(2011,2011)\}$	$0,5\,p$
deduce că $(x,y)\in\{\left(\pm\frac{2011^2-1}{2},\pm\frac{2011^2+1}{2}\right),(0,\pm 2011)\}$	$1\,p$
pentru $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2011}$ transcrie echivalent	
$xy=2011(x+y),\ x,y\neq 0\Longleftrightarrow(x-2011)(y-2011)=2011^2$	$1\,p$
obţine că $(x-2011,y-2011)\in\{\pm(1,2011^2),\pm(2011^2,1),(2011,2011)\}$	$0,5\,p$
deduce că $(x,y)\in\{(2012,2011\cdot 2012),(2010,-2010\cdot 2011),$	
$(2011\cdot 2012,2012),(-2010\cdot 2011,2010),(4022,4022)\}$	$1\,p$
trage concluzia: prima ecuaţie are 6 soluţii $>$ 5 soluţii pentru a doua ecuaţie	$1\,p$
Total	**10 p**

4.

start	$1\,p$
observă că $s_i\in\{0,1,\ldots,n-1\},(\forall)i=\overline{1,n}$	$1\,p$
<u>caz 1</u> $(\exists)i_0:s_{i_0}=0\Longrightarrow s_i\in\{0,1,\ldots,n-2\},(\forall)i=\overline{1,n}$	$3\,p$
aplică principiul lui Dirichlet şi trage concluzia	$1\,p$
<u>caz 2</u> $s_i\neq 0,\,(\forall)i=\overline{1,n}\Longrightarrow s_i\in\{1,2\ldots,n-1\},(\forall)i=\overline{1,n}$	$3\,p$
aplică principiul lui Dirichlet şi trage concluzia	$1\,p$
Total	**10 p**

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul Şcolar Judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

Subiecte pentru clasa a VIII-a

1. Fie a, b, c trei numere reale mai mari sau egale decât -2, având suma nulă. Arătaţi că $a^3 + b^3 + c^3 \geq -6$.

2. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ se notează cu M şi N centrele feţelor $A'B'C'D'$ şi $ADD'A'$. Arătaţi că dacă $AM \perp A'C$ şi $C'N \perp BD'$, atunci paralelipipedul este cub.

3. Arătaţi că un pentagon convex cu toate unghiurile egale şi trei dintre laturi congruente este regulat.

4. a) Fie $OABC$ un tetraedru tridreptunghic ($OA \perp OB \perp OC \perp OA$). Se notează $OA = p, OB = q, OC = r$ şi cu d distanţa de la punctul O la planul (ABC). Arătaţi că are loc egalitatea:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}.$$

b) Fie $a, b, c > 0$. Să se determine o soluţie a ecuaţiei

$$\sqrt{(b+c)(b-x)(c-x)} + \sqrt{(c+a)(c-x)(a-x)} + \sqrt{(a+b)(a-x)(b-x)} = \sqrt{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

Notă. Timp de lucru - 3 ore.

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Caraş-Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011
Clasa a VIII-a - Barem orientativ de corectare

Problema 1. Start ... 1p
Scrie $(a-1)^2(a+2) \geq 0$ ... 3p
Obţine $a^3 - 3a + 2 \geq 0$ ... 3p
Scrie inegalităţile analoage pentru b şi c, apoi însumează şi obţine concluzia ... 3p

Problema 2. Start ... 1p
(Observă că punctele A, M, A', C, respectiv C', N, B, D' sunt coplanare ... 2p)
Scrie de două ori, în mod corespunzător, condiţia de patrulater ortodiagonal ... 2p (4p)
Face calculele şi obţine două egalităţi între lungimile muchiilor paralelipipedului, mai exact $x^2 + y^2 = 2z^2$ si $y^2 + z^2 = 2x^2$, unde $AB = x, BC = y, AA' = z$ ... 4p
Deduce din aceste egalităţi că paralelipipedul este cub ... 1p

Problema 3. Start ... 1p
Precizează că distingem două cazuri: cele trei laturi congruente sunt consecutive sau nu ... 1p
În primul caz ($AB = BC = CD$) deduce mai întâi că $DE = AE$ ... 2p
Deduce apoi că $AB = AE$ şi trage concluzia că $ABCDE$ este pentagon regulat ... 3p
Tratează complet (în acelaşi mod) cazul al doilea ... 3p

Problema 4. Start ... 1p
a) Fie H proiectia lui O pe (ABC) si D proiectia lui O pe BC. Calculeaza pe d ca inaltime in triunghiul dreptunghic OAD si obtine egalitatea din enunt ... 3p
b) Alege un triedru de muchii $OA = \sqrt{a}, OB = \sqrt{b}, OC = \sqrt{c}$ ... 1p
Obtine $AH = \sqrt{a - d^2}$ si analoagele; obtine $BC = \sqrt{b + c}$ si analoagele ... 1p
Obtine $BH \cdot CH \cdot BC + CH \cdot AH \cdot CA + AH \cdot BH \cdot AB =$
$\sqrt{(b+c)(b-d^2)(c-d^2)} + \sqrt{(c+a)(c-d^2)(a-d^2)} + \sqrt{(a+b)(a-d^2)(b-d^2)}$ ... 1p
Arata ca $BH \cdot CH \cdot BC + CH \cdot AH \cdot CA + AH \cdot BH \cdot AB = BC \cdot CA \cdot AB = \sqrt{(b+c)(c+a)(a+b)}$ ... 2p
Folosind punctul a) obtine pentru ecuatie solutia $x = \frac{abc}{bc+ca+ab}$ ... 1p

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

Subiecte pentru clasa a IX-a

1. Fie ABC un triunghi, D mijlocul laturii $[BC]$ şi E piciorul bisectoarei duse din B. Notăm cu P intersecţia segmentelor $[AD]$ şi $[BE]$.
Demonstraţi că P este simetricul lui D faţă de centrul de greutate al triunghiului ABC dacă şi numai dacă $BC = 4AB$.

2. Fie a un număr real. Demonstraţi că dacă ecuaţia

$$2[x] - 3\{x\} = a$$

are două soluţii reale distincte, atunci diferenţa dintre acestea este 5/3.

3. Se defineşte şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ astfel:

$$x_0 = 0, \qquad x_{n+1} = 2x_n - \sqrt{3x_n^2 + 25} \qquad \forall n \in \mathbf{N}\ .$$

Demonstraţi că:
a) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict descrescător.
b) Pentru orice $n \in \mathbf{N}$ are loc relaţia

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n\ .$$

c) Toţi termenii şirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sunt numere întregi divizibile cu 5.
d) x_n este par dacă şi numai dacă n este par.

4. Demonstraţi că pentru orice $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ are loc inegalitatea

$$\text{tg } x + \text{tg } y + \text{tg } z \geq \frac{\sin x}{\cos y} + \frac{\sin y}{\cos z} + \frac{\sin z}{\cos x}\ .$$

Notă: Timp de lucru - 3 ore

Clasa a IX-a

Soluţii

1. Notăm cu x valoarea raportului AB/BC=AE/EC (teorema bisectoarei, 1 punct) şi cu y valoarea raportului AP/PD. Trebuie să demonstrăm că $x = 1/4 \Leftrightarrow y = 1/2$ (2 puncte).

$$\overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{BC}}{1+x} = \frac{1}{1+x}\overrightarrow{BA} + \frac{x}{1+x}\overrightarrow{BC} \text{ (1 punct)}$$
$$\overrightarrow{BP} = \frac{\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BD}}{1+y} = \frac{1}{1+y}\overrightarrow{BA} + \frac{y}{2(1+y)}\overrightarrow{BC} \text{ (1 punct)}$$

   Cum vectorii $\overrightarrow{BE}$ şi $\overrightarrow{BP}$ sunt colineari, rezultă

$$\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+y}} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{y}{2(1+y)}} \text{(2 puncte)}$$

   adică $y = 2x$ (1 punct). Rezultă echivalenţa cerută (1 punct).

2. Fie x_1, x_2 două soluţii distincte ale ecuaţiei. Putem presupune că $x_1 < x_2$, de unde rezultă $[x_1] \leq [x_2]$ (1 punct). Dacă $[x_1] = [x_2]$, din $2[x_1] - 3\{x_1\} = a = 2[x_2] - 3\{x_2\}$ rezultă $\{x_1\} = \{x_2\}$ şi deci $x_1 = x_2$, absurd. Astfel, $[x_1] < [x_2]$ (2 puncte). Se obţin relaţiile

$$3 > 3(\{x_2\} - \{x_1\}) = 2([x_2] - [x_1]) \geq 2$$

   de unde rezultă $[x_2] - [x_1] = 1$ (2 puncte) şi $\{x_2\} - \{x_1\} = 2/3$ (2 puncte).
   În concluzie, $x_2 = [x_2] + \{x_2\} = [x_1] + 1 + \{x_1\} + 2/3 = x_1 + 5/3$ (2 puncte).

3. a) Din enunţ rezultă $x_{n+1} < 2x_n - \sqrt{3}|x_n| \leq (2-\sqrt{3})x_n < x_n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ (2 puncte).
   b) Relaţia de recurenţa conduce la

$$x_n = 2x_{n+1} \pm \sqrt{3x_{n+1}^2 + 25} \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

Conform cu a), doar soluţia cu "+" convine (2 puncte). Adunând această egalitate cu

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - \sqrt{3x_{n+1}^2 + 25}$$

se obţine $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$ (1 punct).
c) $x_0 = 0,\ x_1 = 5$ satisfac condiţiile. Din b) rezultă că dacă x_n şi x_{n+1} sunt întregi divizibili cu 5, atunci x_{n+2} satisface aceleaşi condiţii. O inducţie "cu dublă ipoteză" încheie demonstraţia (2 puncte).
d) x_0 este par, iar x_1 impar. Din b) rezultă că x_n şi x_{n+2} au aceeaşi paritate. O inducţie "cu salt" încheie demonstraţia (2 puncte).

4. Putem presupune că z este cel mai mic dintre cele 3 unghiuri. Atunci

$$(\sin y - \sin z)\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos z}\right) \geq 0$$

de unde obţinem

$$\frac{\sin y}{\cos x} + \frac{\sin z}{\cos z} \geq \frac{\sin y}{\cos z} + \frac{\sin z}{\cos x} \quad (*) \qquad \text{(3 puncte)}$$

Utilizând monotonia funcţiilor trigonometrice în primul cadran, obţinem

$$(\sin x - \sin y)\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos y}\right) \geq 0$$

ceea ce se mai scrie

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} \geq \frac{\sin x}{\cos y} + \frac{\sin y}{\cos x} \quad (**) \qquad \text{(3 puncte)}$$

Adunând membru cu membru inegalităţile $(*)$ şi $(**)$ rezultă concluzia (3 puncte).

Universitatea de Vest din Timişoara **Inspectoratul Şcolar Judeţean**
Facultatea de Matematică şi Informatică **Caraş-Severin**

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

Subiecte pentru clasa a X-a

1. Fie A o mulţime de numere reale cu 2011 elemente. Determinaţi funcţiile injective $f : A \to A$ care au proprietatea că

$$|f(x) - x| = |f(y) - y|$$

pentru orice $x, y \in A$.

2. a) Arătaţi că funcţiile ("sinus hiperbolic" şi respectiv "cosinus hiperbolic")

$$sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ sh(t) \stackrel{def}{=} \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \qquad ch : \mathbb{R} \to [1, \infty),\ ch(t) \stackrel{def}{=} \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

sunt surjective; arătaţi că funcţia sh este bijectivă şi să se determine inversa acesteia.
b) Arătaţi că au loc următoarele egalităţi:

$$ch^2(t) - sh^2(t) = 1; \quad ch(t_1 + t_2) = ch(t_1)ch(t_2) + sh(t_1)sh(t_2);$$
$$sh(t_1 + t_2) = sh(t_1)ch(t_2) + ch(t_1)sh(t_2)$$

pentru orice $t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
c) Arătaţi că dacă numerele reale x, y, z verifică egalitatea

$$(x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = z + \sqrt{1 + z^2},$$

atunci au loc egalităţile

$$x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2} = z; \qquad xy + \sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2} = \sqrt{1 + z^2};$$
$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 4x^2y^2z^2.$$

3. Fie a, b, c numere complexe distincte astfel încât $|bc|a + |ca|b + |ab|c = 0$. Arătaţi că are loc inegalitatea $|(b + c)(c + a)(a + b)| \geq |abc|$.

4. a) Arătaţi că numărul $2010! + 1$ este divizibil cu 2011.
b) Arătaţi că o mulţime de 2010 numere naturale consecutive nu se poate descompune în două submulţimi nevide şi disjuncte A şi B astfel încât produsul numerelor din mulţimea A să fie egal cu produsul numerelor din mulţimea B.

Notă. Timp de lucru - 3 ore.

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică
Inspectoratul Şcolar Judeţean Caraş-Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011
Clasa a X-a - Barem orientativ de corectare

Problema 1. Start ... 1p
Afirma ca functia f este si surjectiva (bijectiva) ... 2p
Obtine $f(x) = x \pm c$ pentru orice $x \in A$ (c fixat) ... 2p
Scrie $\sum_{x\in A} f(x) = \sum_{x\in A} x + c \cdot \sum_{x\in A} \pm 1 = \sum_{x\in A} x$ ... 3p
Din imparitatea numarului de elemente ale lui A deduce $c = 0$; concluzioneaza ca raspunsul la problema este functia identitate ... 2p
Problema 2. Start ... 1p
Demonstreaza surjectivitatea lui sh si respectiv ch ... 1p+1p=2p
Demonstreaza injectivitatea (bijectivitatea) lui sh si obtine inversa ... 0.5p
Demonstreaza cele trei egalitati de la punctul b) ... 0.5p+0.5p+0.5p=1.5p
Logaritmeaza ipoteza din c) si scrie sub forma $sh^{-1}(x) + sh^{-1}(y) = sh^{-1}(z)$ ... 1p
Aplica egalitatii de mai sus functia sh (si/sau ch) si obtine cele doua egalitati din concluzie ... 1p
Obtine egalitatile similare $-y\sqrt{1+z^2} + z\sqrt{1+y^2} = x$, $-x\sqrt{1+z^2} + z\sqrt{1+x^2} = y$ ... 2p
Elimina $\sqrt{1+x^2}, \sqrt{1+y^2}, \sqrt{1+z^2}$ din egalitatile corespunzatoare si obtine a treia egalitate de la c) ... 1p
(Daca demonstreaza altfel/direct se acorda cele 5p)
Problema 3. Start ... 1p
Deduce ca punctele $A_1\left(\frac{1}{|a|}\cdot a\right), B_1\left(\frac{1}{|b|}\cdot b\right), C_1\left(\frac{1}{|c|}\cdot c\right)$ sunt pe cercul unitate si ca centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$ este in originea O ... 1p+1p=2p
Deduce ca triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral si de aici ca unghiurile $\angle A_1OB_1$ etc. au masurile egale cu $120°$ ... 1p+1p=2p
Aplica teorema cosinusului in triunghiurile OBC, OCA si respectiv OAB (unde s-a notat $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$) si obtine egalitatile $|b-c|^2 = |b|^2 + |c|^2 + |b|\cdot|c|$ etc. ... 1p
Din identitatea paralelogramului si cele de mai sus obtine egalitatile $|b+c|^2 = |b|^2+|c|^2-|b|\cdot|c|$ si analoagele ... 2p
Din inegalitatea mediilor deduce inegalitatile $|b+c|^2 \geq |b|\cdot|c|$ etc. ... 1p
Obtine prin inmultirea acestora inegalitatea din enunt ... 1p
Problema 4. Start ... 1p
Observa ca 2011 este numar prim; aplica teorema lui Wilson si deduce ca $2010! + 1$ se divide cu 2011 ... 1p+1p=2p
Presupune ca ar exista o descompunere ca in enunt si arata ca niciunul din cele 2010 numere nu se divide cu 2011; arata ca acestea dau resturile $\{1, 2, \dots, 2010\}$ la impartirea cu 2011 ... 2p
Obtine in termeni de clase de congruenta o egalitate de forma $\prod_{r\in A'} r = \prod_{r\in B'} r$ (modulo 2011) ... 1p
Obtine echivalent $\left(\prod_{r\in A'} r\right)^{2010} = \left(\prod_{r\in\{1,2,\dots,2010\}} r\right)^{1005}$ (modulo 2011) ... 1p

Din teorema lui Fermat deduce ca membrul stang da restul 1 la impartirea cu 2011 ... 1p
Din teorema lui Wilson si binomul lui Newton deduce ca membrul drept da restul -1 la impartirea cu 2011 ... 1p
Observa contradictia si trage concluzia ... 1p

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

Subiecte pentru clasa a XI-a

1. Determinaţi toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) - f(y) \in \mathbb{Q}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x - y \in \mathbb{Q}$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, iar $A \in \mathcal{M}_{2n\times n}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n\times 2n}(\mathbb{C})$ două matrice cu proprietatea că $AB = C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,2n}}$ are elementele date de

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j; \\ -1 & \text{dacă } |i-j| = n; \\ 0 & \text{dacă } i \not\equiv j (\text{mod } n). \end{cases}$$

Determinaţi produsul BA.

3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, iar $A, B, C, D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ matrice cu proprietatea că $A \cdot {}^tB$ şi $C \cdot {}^tD$ sunt matrice simetrice, iar $A \cdot {}^tD - B \cdot {}^tC = I_n$. Arătaţi că ${}^tA \cdot D - {}^tC \cdot B = I_n$.

4. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri definite prin $x_1 = \frac{7}{25}$, $y_1 = \frac{24}{25}$ şi

$$x_{n+1} = x_n cos(y_n) - y_n sin(y_n), \quad y_{n+1} = x_n sin(y_n) + y_n cos(y_n), \quad (\forall) n \geq 1.$$

Arătaţi că cele două şiruri sunt convergente şi determinaţi limitele lor.

Notă: Timp de lucru - 3 ore

Concursul interjudeţean de matematică
"Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011
Barem de corectare a soluţiilor la clasa a XI-a

1.

start	1 p
pentru $r \in \mathbb{Q}$ consideră funcţia $g_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_r(x) = f(x+r) - f(x)$	1 p
g_r este continuă cu $Im(g_r) \subseteq \mathbb{Q}$	1 p
deci g_r este constantă $\overset{not}{\equiv} c_r \in \mathbb{Q}$	1 p
consideră $a = c_1 = f(1) - f(0)$, $b = f(0)$ şi observă că $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}$	1 p
arată că $c_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot c_1 = \frac{a}{n}$	2 p
deduce că $c_r = a \cdot r$, $(\forall) r \in \mathbb{Q}$	1 p
deci $f(r) = ar + b$, $(\forall) r \in \mathbb{Q}$	1 p
din continuitate obţine că $f(x) = ax + b$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, cu $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}$	1 p
Total	**10 p**

2.

start	1 p
scrie $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, $B = [B_1 \ B_2]$, cu $A_i, B_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	2 p
şi $AB = \begin{bmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}$	2 p
obţinecă $A_2 = -A_1$, $B_2 = -B_1$, $B_1 = A_1^{-1}$	2 p
deduce că $BA = 2 \cdot I_n$	3 p
Total	**10 p**

3.

start	1 p
scrie $A \cdot {}^tB = B \cdot {}^tA$, $C \cdot {}^tD = D \cdot {}^tC$	1 p
obţine $D \cdot {}^tA - C \cdot {}^tB = I_n$	2 p
arată că $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$	3 p
deduce că $\begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = I_{2n}$	2 p
din blocul $(1,1)$ trage concluzia	1 p
Total	**10 p**

4.

start	1 p
observă că $x_1 = cos(\alpha_1), y_1 = sin(\alpha_1)$, cu $\alpha_1 = \arcsin \frac{24}{25}$	1 p
arată prin inducţie că $x_n = cos(\alpha_n), y_n = sin(\alpha_n)$	2 p
şi $\alpha_{n+1} = \alpha_n + sin(\alpha_n)$	1 p
arată prin inducţie că $\alpha_n \nearrow$, $\alpha \in (0, \pi)$, $(\forall) n \geq 1$	2 p
$(\alpha_{n+1} = \alpha_n + sin(\alpha_n) > \alpha_n > 0$,	
$\alpha_{n+1} = \alpha_n + sin(\alpha_n) = \alpha_n + sin(\pi - \alpha_n) < \alpha_n + \pi - \alpha_n = \pi$)	
deduce că (α_n) este convergent	1 p
cu $\lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha_n = \pi$	1 p
deduce că (x_n) şi (y_n) sunt convergente cu $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = -1$ şi $\lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = 0$	1 p
Total	**10 p**

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

Subiecte pentru clasa a XII-a

1. Calculaţi integrala

$$\int_{25}^{2011} \frac{arctg(\sqrt{x+263})}{arctg(\sqrt{x+263}) + arctg(\sqrt{2299-x})} dx\,.$$

2. Fie $(M, \cdot)$ o mulţime nevidă, înzestrată cu o operaţie binară asociativă, cu proprietatea de simplificare la dreapta şi la stânga(i.e., $xa = ya \Longrightarrow x = y$, resp. $ax = ay \Longrightarrow x = y$) şi astfel încât pentru orice $a \in M$ mulţimea $\{a^n | n \in \mathbb{N}\}$ este finită. Arătaţi că $(M, \cdot)$ este un grup.

3. Fie $\mathbb{K}$ un corp comutativ.
a) Dacă $char(\mathbb{K}) \neq 2$, arătaţi că mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2 + y^2 = 1$ cu $x, y \in \mathbb{K}$ este

$$\{(1,0)\} \cup \left\{ \left(\frac{r^2-1}{1+r^2}, \frac{2r}{1+r^2} \right) | r \in \mathbb{K} \right\}.$$

b) Determinaţi mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2 + y^2 = 1$ în cazul în care $char(\mathbb{K}) = 2$.

4. a) Să se calculeze integrala

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x\, dx\,.$$

b) Arătaţi că

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2},$$

unde $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n)$, iar $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$.

Notă: Timp de lucru - 3 ore

Concursul interjudeţean de matematică
"Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011

Barem de corectare a soluţiilor la clasa a XII-a

1.

start	$1\,p$
face schimbarea de variabilă $y = 2036 - x$	$2\,p$
şi obţine că $I = \int_{25}^{2011} \frac{arctg(\sqrt{x+263})}{arctg(\sqrt{x+263})+arctg(\sqrt{2299-x})}dx = \int_{25}^{2011} \frac{arctg(\sqrt{2299-x})}{arctg(\sqrt{x+263})+arctg(\sqrt{2299-x})}dx$	$3\,p$
obţine că $2I = \int_{25}^{2011} 1\,dx = 1986$	$2\,p$
deci $I = 993$	$2\,p$
Total	**10 p**

2.

start	$1\,p$
$\{a^n \vert n \in \mathbb{N}^*\}$ finită $\Longrightarrow (\exists) m, n \in \mathbb{N}^*, m > n : a^m = a^n$	$2\,p$
din $a^m \cdot x = a^n \cdot x$ deduce că $a^{m-n} \cdot x = x, (\forall) x \in G$	$1\,p$
analog $x \cdot a^{m-n} = x, (\forall) x \in G$	$1\,p$
deci $a^{m-n} \overset{not}{=} u_a$ este element unitate	$1\,p$
arată că $u_a = u_b$, $(\forall) a, b \in G$	$2\,p$
pentru orice $a \in G$ deduce că a^{m-n-1} este invers pentru a	$1\,p$
trage concluzia	$1\,p$
Total	**10 p**

3.

start	$1\,p$
a) pentru $S = \{(x,y) \in \mathbb{K} \vert x^2 + y^2 = 1\}$ şi $A = \{(1,0)\} \cup \left\{ \left(\frac{r^2-1}{1+r^2}, \frac{2r}{1+r^2} \right) \vert r \in \mathbb{K} \right\}$	
arată că $1^2 + 0^2 = 1 = \left(\frac{r^2-1}{1+r^2}\right)^2 + \left(\frac{2r}{1+r^2}\right)^2$, deci $A \subseteq S$	$2\,p$
pentru $x = 1$ rezultă $y = 0$	$1\,p$
pentru $x \neq 1$ consideră $r = \frac{y}{1-x}$ şi obţine că $r^2(1-x) = 1 + x$	$1\,p$
deduce că $x = \frac{r^2-1}{1+r^2}$ şi $y = \frac{2r}{1+r^2}$	$1\,p$
deduce că $S \subseteq A$	$1\,p$
b) scrie ecuaţia sub forma $(x+y)^2 = 1$	$1\,p$
deduce că $x + y = 1$	$1\,p$
obţine că $S = \{(r, r+1) \vert r \in \mathbb{K}\}$	$1\,p$
Total	**10 p**

4.

start	$1\,p$
a) calculează $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$	$1\,p$
obţine relaţia de recurenţă $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$	$2\,p$
deduce că $I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$	$1\,p$
şi $I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$	$1\,p$
b) arată că $I_{2n} > I_{2n+1} > I_{2n+2}$	$1\,p$
obţine inegalităţile $\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$	$1\,p$
şi $\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$	$1\,p$
trece la limită şi obţine concluzia	$1\,p$
Total	**10 p**