CONCURSUL NAŢIONAL „LAURENŢIU PANAITOPOL"
14 mai 2011, Tulcea

Soluţii – clasa a X-a

1. a) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \sin x$ este strict crescătoare.
b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} x + \sin x = 2^y + y + \sin y - 1 \\ y + \sin y = 2^z + z + \sin z - 1 \\ z + \sin z = 2^x + x + \sin x - 1 \end{cases}$$

Adrian Ivan

Soluţie. a) Dacă $a > b$, atunci $a + \sin a - b - \sin b = a - b + 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} > 0$, deoarece $|2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}| \leq |2\sin\frac{a-b}{2}| < |a-b|$ .... **3 p**

b) Din a), funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) + 2^x - 1$ este strict crescătoare ... **1 p**

Observăm acum că, dacă (x, y, z) este soluţie a sistemului şi, de exemplu, $x \geq y$ atunci $f(z) = g(x) \geq g(y) = f(x)$, deci $z \geq x$, apoi, analog, $y \geq z$, deci $x = y = z$. Astfel, $2^x - 1 = 0$, de unde $x = y = z = 0$ .... **3 p**

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $x! + 5 \cdot y! = z!$.

Soluţie. Observăm că trebuie $z > x, z > y$ .... **1 p**

Dacă $y > x$, ecuaţia se scrie $1 + 5(x+1)(x+2)\ldots y = (x+1)(x+2)\ldots z$, deci $x + 1|1$ şi $y|1$, adică $x = 0, y = 1$, apoi $z = 3$ .... **2 p**

Dacă $x > y$, ecuaţia se scrie $(y+1)(y+2)\ldots x + 5 = (y+1)(y+2)\ldots z$ deci, ca mai sus $x = 5, y = 0$, ceea ce nu conduce la nicio soluţie .... **2 p**

Dacă $x = y$, ecuaţia se scrie $6 = (x+1)(x+2)\ldots z$; rezultă soluţiile $x = y = 1$, $z = 2$ şi $x = y = 5, z = 6$ .... **2 p**

3. Arătaţi că, dacă a, b şi $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$ sunt numere raţionale pozitive, atunci $\sqrt[4]{a}$ şi $\sqrt[4]{b}$ sunt numere raţionale.

Laurenţiu Panaitopol

Soluţie. Fie $s = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$ şi $p = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}$. Atunci $s^4 = a + b + 4p(s^2 - 2p) + 6p^2$, deci $p^2 - 2s^2p + c = 0$, cu $c = \frac{1}{2}(s^4 - a - b) \in \mathbb{Q}$ .... **2 p**

Rezultă $ab = p^4 = 4s^4p^2 - 4s^2cp + c^2$ şi, combinând cu relaţia precedentă, $(8s^6 - 4s^2c)p + c^2 - ab - 4s^4c = 0$. .... **2 p**

Dacă $2s^4 = c$, atunci $3s^4 + a + b = 0$, deci $a = b = 0 \in \mathbb{Q}$ .... **1 p**

Dacă $2s^4 \neq c$, atunci $p \in \mathbb{Q}$, iar $2\sqrt[4]{a}$ şi $2\sqrt[4]{b}$ sunt egale cu $s \pm \sqrt{d}$, unde $d = s^2 - 4p \in \mathbb{Q}$. Deducem $(s + \sqrt{d})^4 = s^4 + 6s^2d + d^2 + 4\sqrt{d}(s^3 + ds) \in \mathbb{Q}$, deci $\sqrt{d} \in \mathbb{Q}$, de unde concluzia .... **2 p**

4. Fie a un număr întreg. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care au proprietatea:

$$f(f(x) + y) = x + f(y + a),$$

oricare ar fi numerele întregi x, y.

Soluţie. Avem $f(f(x)) = x + f(a)$, ceea ce arată că f este surjectivă .... **1 p**

Apoi, $f(f(x) + 1) = x + f(a + 1)$, deci $f(f(x) + 1) - f(f(x)) =$ constant ... **2 p**

Astfel, $f(t + 1) - f(t) = k, \forall t \in \mathbb{Z}$, deci $f(t) \equiv kt + c$ .... **2 p**

În sfârşit, $k((kx + c) + y) + c = x + k(y + a) + c, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ este echivalent cu $c = a$ şi $k = \pm 1$ .... **2 p**