

CONCURSUL NAȚIONAL „LAURENȚIU PANAITOPOL”

14 mai 2011, Tulcea

**Soluții – clasa a X-a**

1. a) Arătați că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \sin x$  este strict crescătoare.  
 b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} x + \sin x = 2^y + y + \sin y - 1 \\ y + \sin y = 2^z + z + \sin z - 1 \\ z + \sin z = 2^x + x + \sin x - 1 \end{cases}$$

*Adrian Ivan*

*Soluție.* a) Dacă  $a > b$ , atunci  $a + \sin a - b - \sin b = a - b + 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} > 0$ , deoarece  $|2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}| \leq |2 \sin \frac{a-b}{2}| < |a - b| \dots \dots \dots$  **3 p**

b) Din a), funcția  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) + 2^x - 1$  este strict crescătoare... **1 p**  
 Observăm acum că, dacă  $(x, y, z)$  este soluție a sistemului și, de exemplu,  $x \geq y$  atunci  $f(z) = g(x) \geq g(y) = f(x)$ , deci  $z \geq x$ , apoi, analog,  $y \geq z$ , deci  $x = y = z$ . Astfel,  $2^x - 1 = 0$ , de unde  $x = y = z = 0 \dots \dots \dots$  **3 p**

2. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația  $x! + 5 \cdot y! = z!$ .

*Soluție.* Observăm că trebuie  $z > x, z > y \dots \dots \dots$  **1 p**

Dacă  $y > x$ , ecuația se scrie  $1 + 5(x+1)(x+2) \dots y = (x+1)(x+2) \dots z$ , deci  $x+1|1$  și  $y|1$ , adică  $x = 0, y = 1$ , apoi  $z = 3 \dots \dots \dots$  **2 p**

Dacă  $x > y$ , ecuația se scrie  $(y+1)(y+2) \dots x + 5 = (y+1)(y+2) \dots z$  deci, ca mai sus  $x = 5, y = 0$ , ceea ce nu conduce la nicio soluție  $\dots \dots \dots$  **2 p**

Dacă  $x = y$ , ecuația se scrie  $6 = (x+1)(x+2) \dots z$ ; rezultă soluțiile  $x = y = 1, z = 2$  și  $x = y = 5, z = 6 \dots \dots \dots$  **2 p**

3. Arătați că, dacă  $a, b$  și  $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$  sunt numere raționale pozitive, atunci  $\sqrt[4]{a}$  și  $\sqrt[4]{b}$  sunt numere raționale.

*Laurențiu Panaitopol*

*Soluție.* Fie  $s = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$  și  $p = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}$ . Atunci  $s^4 = a + b + 4p(s^2 - 2p) + 6p^2$ , deci  $p^2 - 2s^2p + c = 0$ , cu  $c = \frac{1}{2}(s^4 - a - b) \in \mathbb{Q} \dots \dots \dots$  **2 p**

Rezultă  $ab = p^4 = 4s^4p^2 - 4s^2cp + c^2$  și, combinând cu relația precedentă,  $(8s^6 - 4s^2c)p + c^2 - ab - 4s^4c = 0 \dots \dots \dots$  **2 p**

Dacă  $2s^4 = c$ , atunci  $3s^4 + a + b = 0$ , deci  $a = b = 0 \in \mathbb{Q} \dots \dots \dots$  **1 p**

Dacă  $2s^4 \neq c$ , atunci  $p \in \mathbb{Q}$ , iar  $2\sqrt[4]{a}$  și  $2\sqrt[4]{b}$  sunt egale cu  $s \pm \sqrt{d}$ , unde  $d = s^2 - 4p \in \mathbb{Q}$ . Deducem  $(s + \sqrt{d})^4 = s^4 + 6s^2d + d^2 + 4\sqrt{d}(s^3 + ds) \in \mathbb{Q}$ , deci  $\sqrt{d} \in \mathbb{Q}$ , de unde concluzia  $\dots \dots \dots$  **2 p**

4. Fie  $a$  un număr întreg. Determinați toate funcțiile  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  care au proprietatea:

$$f(f(x) + y) = x + f(y + a),$$

oricare ar fi numerele întregi  $x, y$ .

*Soluție.* Avem  $f(f(x)) = x + f(a)$ , ceea ce arată că  $f$  este surjectivă  $\dots \dots$  **1 p**

Apoi,  $f(f(x) + 1) = x + f(a + 1)$ , deci  $f(f(x) + 1) - f(f(x)) = \text{constant} \dots$  **2 p**

Astfel,  $f(t + 1) - f(t) = k, \forall t \in \mathbb{Z}$ , deci  $f(t) \equiv kt + c \dots \dots \dots$  **2 p**

În sfârșit,  $k((kx + c) + y) + c = x + k(y + a) + c, \forall x, y \in \mathbb{Z}$  este echivalent cu  $c = a$  și  $k = \pm 1 \dots \dots \dots$  **2 p**