

CONCURSUL NAȚIONAL „LAURENȚIU PANAITOPOL”
14 mai 2011, Tulcea

Subiecte – clasa a X-a

1. a) Arătați că funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \sin x$$

este strict crescătoare.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} x + \sin x = 2^y + y + \sin y - 1 \\ y + \sin y = 2^z + z + \sin z - 1 \\ z + \sin z = 2^x + x + \sin x - 1 \end{cases} .$$

2. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația

$$x! + 5 \cdot y! = z!.$$

3. Arătați că, dacă a, b și $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$ sunt numere raționale pozitive, atunci $\sqrt[4]{a}$ și $\sqrt[4]{b}$ sunt numere raționale.

Laurențiu Panaitopol

4. Fie a un număr întreg. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ care au proprietatea:

$$f(f(x) + y) = x + f(y + a),$$

oricare ar fi numerele întregi x, y .

Timp de lucru: 4 ore. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.