

CONCURSUL NAȚIONAL „LAURENȚIU PANAITOPOL”
14 mai 2011, Tulcea

Soluții – clasa a IX-a

1. Arătați că, dacă p, q, r sunt numere naturale prime iar rădăcinile ecuației $px^2 - qx - r = 0$ au aceeași parte fracționară, atunci $p = q = r$.

Lucian Petrescu

Soluție. Numărul $|x_1 - x_2|$ este întreg, **2 p**
deci și numărul $(x_1 - x_2)^2 = \frac{q^2 - 4pr}{p^2}$ este întreg. **3 p**
Rezultă $p \mid q$, deci $p = q$, apoi $p \mid r$, deci $p = r$ **2 p**

2. Pe baza $[BC]$ a triunghiului isoscel ABC se iau punctele K, L astfel încât $m(\angle BAC) \geq 2m(\angle KAL)$. Arătați că $BC \geq 2KL$.

Soluție. Fie M mijlocul laturii $[BC]$. Dacă L, K sunt de aceeași parte a lui M , concluzia este evidentă. **1 p**

În caz contrar, notând $m(\angle MAK) = a, m(\angle MAL) = b, AM = h$, obținem $KL = h(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)$ **3 p**

Cerința rezultă din

$$BC = 2h \operatorname{tg} \frac{A}{2} \geq 2h \operatorname{tg}(a + b) = 2h \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \geq 2h(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) \quad \dots \quad \mathbf{3 p}$$

3. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri care îndeplinesc condițiile

$$AB \leq A'B', AC \leq A'C', BC \leq B'C'.$$

a) Arătați că este posibil ca $\operatorname{aria}(ABC) > \operatorname{aria}(A'B'C')$.

b) Arătați că dacă, în plus, triunghiurile sunt ascuțitunghice, atunci

$$\operatorname{aria}(ABC) \leq \operatorname{aria}(A'B'C').$$

Laurențiu Panaitopol

Soluție. a) Dacă luăm $\triangle ABC$ isoscel cu baza $BC = 8$ și înălțimea 3 , atunci $AB = AC = 5, S = 12$, iar pentru $\triangle A'B'C'$ isoscel cu baza $B'C' = 16 > BC$ și înălțimea $1, A'B' = A'C' = \sqrt{65} > AB, S' = 8 < S$ **3 p**

b) Din $A + B + C = A' + B' + C'$ rezultă $A \leq A', B \leq B'$ sau $C \leq C'$ **2 p**

Dacă, de exemplu $A \leq A'$, atunci, deoarece unghiurile sunt ascuțite, obținem $\sin A \leq \sin A'$, deci $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin A \leq \frac{1}{2}A'B' \cdot A'C' \sin A' = S'$ **2 p**

4. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au proprietatea: oricare ar fi numerele reale x, y , are loc relația $x^2 + y^2 + 2f(xy) = f(x + y)(f(x) + f(y))$.

Soluție. Din ipoteză reiese $2f(0) = 2f^2(0)$, deci $f(0) = 0$ sau $f(0) = 1$ **1 p**

Dacă $f(0) = 0$, atunci $f^2(x) = x^2$, deci $|f(x)| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$; **2 p**

în acest caz arătăm că $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, avem $2x^2 + 2f(-x^2) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci, pentru orice $t \leq 0, f(t) = f(-(\sqrt{-t})^2) = -(\sqrt{-t})^2 = t$ **1 p**

Apoi, dacă $a > 0$, atunci $x^2 + a^2 + 2ax = (x + a)(x + f(a))$ pentru $x + a < 0$, deci $f(a) = a$, aceasta fiind valabil pentru a arbitrar. **1 p**

Arătăm că situația $f(0) = 1$ este imposibilă. Pentru aceasta observăm că, dacă $f(0) = 1$, atunci $x^2 + 2 = f(x)(f(x) + 1)$ și $2x^2 + 2f(-x^2) = f(x) + f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$; în particular, $3 = f^2(1) + f(1) = f^2(-1) + f(-1)$ și $2 = f(1) - f(-1)$, relații care se contrazic. **2 p**