CONCURSUL NAŢIONAL ,,LAURENŢIU PANAITOPOL"
14 mai 2011, Tulcea

Soluţii – clasa a IX-a

1. Arătaţi că, dacă p, q, r sunt numere naturale prime iar rădăcinile ecuaţiei $px^2 - qx - r = 0$ au aceeaşi parte fracţionară, atunci $p = q = r$.

Lucian Petrescu

Soluţie. Numărul $|x_1 - x_2|$ este întreg, ... **2 p**
deci şi numărul $(x_1 - x_2)^2 = \frac{q^2-4pr}{p^2}$ este întreg. .... **3 p**
Rezultă $p \mid q$, deci $p = q$, apoi $p \mid r$, deci $p = r$ .... **2 p**

2. Pe baza $[BC]$ a triunghiului isoscel ABC se iau punctele K, L astfel încât $\mathrm{m}(\angle BAC) \geq 2\mathrm{m}(\angle KAL)$. Arătaţi că $BC \geq 2\,KL$.

Soluţie. Fie M mijlocul laturii $[BC]$. Dacă L, K sunt de aceeaşi parte a lui M, concluzia este evidentă. .... **1 p**
În caz contrar, notând $\mathrm{m}(\angle MAK) = a, \mathrm{m}(\angle MAL) = b, AM = h$, obţinem $KL = h(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)$. .... **3 p**
Cerinţa rezultă din
$BC = 2h \operatorname{tg} \frac{A}{2} \geq 2h \operatorname{tg}(a+b) = 2h \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \geq 2h(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)$ .... **3 p**

3. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri care îndeplinesc condiţiile

$$AB \leq A'B',\ AC \leq A'C',\ BC \leq B'C'.$$

a) Arătaţi că este posibil ca $\text{aria}(ABC) > \text{aria}(A'B'C')$.
b) Arătaţi că dacă, în plus, triunghiurile sunt ascuţitunghice, atunci

$$\text{aria}(ABC) \leq \text{aria}(A'B'C').$$

Laurenţiu Panaitopol

Soluţie. a) Dacă luăm ΔABC isoscel cu baza $BC = 8$ şi înălţimea 3, atunci $AB = AC = 5, S = 12$, iar pentru $\Delta A'B'C'$ isoscel cu baza $B'C' = 16 > BC$ şi înălţimea 1, $A'B' = A'C' = \sqrt{65} > AB, S' = 8 < S$ .... **3 p**
b) Din $A + B + C = A' + B' + C'$ rezultă $A \leq A', B \leq B'$ sau $C \leq C'$ ..... **2 p**
Dacă, de exemplu $A \leq A'$, atunci, deoarece unghiurile sunt ascuţite, obţinem $\sin A \leq \sin A'$, deci $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin A \leq \frac{1}{2}A'B' \cdot A'C' \sin A' = S'$ .... **2 p**

4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea: oricare ar fi numerele reale x, y, are loc relaţia $x^2 + y^2 + 2f(xy) = f(x+y)\,(f(x) + f(y))$.

Soluţie. Din ipoteză reiese $2f(0) = 2f^2(0)$, deci $f(0) = 0$ sau $f(0) = 1$ ..... **1 p**
Dacă $f(0) = 0$, atunci $f^2(x) = x^2$, deci $|f(x)| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$; .... **2 p**
în acest caz arătăm că $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, avem $2x^2 + 2f(-x^2) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci, pentru orice $t \leq 0, f(t) = f(-(\sqrt{-t})^2) = -(\sqrt{-t})^2 = t$ .... **1 p**
Apoi, dacă $a > 0$, atunci $x^2 + a^2 + 2ax = (x+a)(x + f(a))$ pentru $x + a < 0$, deci $f(a) = a$, aceasta fiind valabil pentru a arbitrar .... **1 p**
Arătăm că situaţia $f(0) = 1$ este imposibilă. Pentru aceasta observăm că, dacă $f(0) = 1$, atunci $x^2 + 2 = f(x)(f(x)+1)$ şi $2x^2 + 2f(-x^2) = f(x) + f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; în particular, $3 = f^2(1) + f(1) = f^2(-1) + f(-1)$ şi $2 = f(1) - f(-1)$, relaţii care se contrazic .... **2 p**