

CONCURSUL NAȚIONAL „LAURENȚIU PANAITOPOL”
14 mai 2011, Tulcea

Subiecte – clasa a IX-a

1. Arătați că, dacă p, q, r sunt numere naturale prime iar rădăcinile ecuației

$$px^2 - qx - r = 0$$

au aceeași parte fracționară, atunci

$$p = q = r.$$

2. Pe baza $[BC]$ a triunghiului isoscel ABC se iau punctele K, L astfel încât

$$m(\angle BAC) \geq 2m(\angle KAL).$$

Arătați că $BC \geq 2KL$.

3. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri care îndeplinesc condițiile

$$AB \leq A'B', AC \leq A'C', BC \leq B'C'.$$

a) Arătați că este posibil ca $\text{aria}(ABC) > \text{aria}(A'B'C')$.

b) Arătați că dacă, în plus, triunghiurile sunt ascuțitunghice, atunci $\text{aria}(ABC) \leq \text{aria}(A'B'C')$.

Laurențiu Panaitopol

4. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au proprietatea:

$$x^2 + y^2 + 2f(xy) = f(x+y)(f(x) + f(y)),$$

oricare ar fi numerele reale x, y .

Timp de lucru: 4 ore. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.