Concursul Interjudeţean de Matematică „Teodor Topan”
ediţia a V-a, Şimleu Silvaniei – 20 noiembrie 2010

Clasa a IX-a

1. Să se demonstreze că pentru orice numere reale x, y are loc inegalitatea:
$$2(x^4+y^4) \geq xy(x+y)^2 \ .$$

2. Fie $(u_n)_{n\geq 1}$ şirul de numere cu termenul general
$$u_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, \text{ dacă n este par} \\ \dfrac{n-1}{2}, \text{ dacă n este impar} \end{cases}$$
şi $f(n) = u_1 + u_2 + ... + u_n$, oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$.
Să se arate că $f(n+m) - f(n-m) = nm$, oricare ar fi numerele naturale $n, m \geq 1$.

3. Determinaţi numerele naturale $n \geq 1$ cu proprietatea că
$$2^n + 5^n + 11^n \text{ se divide cu 9.}$$

4. Fie m, n două numere naturale prime între ele şi
$$q = (m-n)^2 \text{ şi } r = m^2 - mn + n^2 .$$
   a) Demonstraţi că dacă p este un număr prim care divide pe q şi r, atunci p divide pe mn, pe $m-n$, pe m^2 şi pe n^2.
   b) Aflaţi cel mai mare divizor comun al numerelor q şi r.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*
Timp de lucru: 3 ore

Clasa a X-a

1. Fie $k \geq 2$ un număr natural și $n_1,...,n_k$ numere naturale nenule. Să se arate că nu există numere raționale $x_1,...,x_k$ și $y_1,...,y_k$ astfel încât:

$$(x_1 + y_1\sqrt{2})^{2n_1} + ... + (x_k + y_k\sqrt{2})^{2n_k} = 5 + 4\sqrt{2}.$$

2. Să se rezolve în numere reale ecuația:

$$2^{[x]} = 2x + 1,$$

unde am notat cu $[x]$, partea întreagă a numărului real x.

3. Fie ABC un triunghi. Demonstrați că dacă pentru trei puncte distincte M_1, M_2, M_3 de pe segmentul închis [AB] are loc relația:
$CM_i^2 \cdot AB^2 = AM_i^2 \cdot BC^2 + BM_i^2 \cdot AC^2$ (i=1,2,3), atunci triunghiul ABC este dreptunghic în C.

4. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x + 3y + [2x] + 2[4y] = 18 \\ 5x + y + 2[2x] - [4y] = 0 \end{cases},$$

pe mulțimea numerelor reale pozitive. (Prin [a] am notat partea întreagă a numărului real a.)

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*
Timp de lucru: 3 ore

Concursul Interjudeţean de Matematică „Teodor Topan”
ediţia a V-a, Şimleu Silvaniei – 20 noiembrie 2010

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea $A_a = \begin{pmatrix} \cos 2a\pi & -\sin 2a\pi \\ \sin 2a\pi & \cos 2a\pi \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

   a. Există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A_a^{\,k} = I_2$ dacă şi numai dacă $a \in \mathbb{Q}$;

   b. Fiind dat un număr $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $n = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* / A_a^{\,k} = I_2\right\}$ dacă şi numai dacă $a = \dfrac{b}{n}$ cu $b \in \mathbb{Z}, (b,n) = 1$.

2. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, cu $x_0 = 0$ şi $x_n = \sqrt{n^2 + x_{n-1}},$ pentru $n \geq 1$.

   a) Să se arate că $n \leq x_n \leq n\sqrt{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

   b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

   c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - n)$.

3. Fie $a > 0$ şi $b \in \mathbb{R}$. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietățile: $x_1 = b$ și $x_n = x_{n-1} + \ln(e^{x_{n-1}} + a + 1)$, oricare ar fi $n \geq 2$.

   a) Să se arate că are loc relația $e^{x_n} = e^{2x_{n-1}} + (a+1)e^{x_{n-1}}$, oricare ar fi $n \geq 2$.

   b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{x_{n+1}}}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}+1)...(e^{x_n}+1)}$.

4. Se consideră mulţimea G a matricelor $A \in M_2(\mathbb{C})$, de forma $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \neq 0.$ Să se determine submulţimile $H \subset G$ cu 7 elemente, care au proprietatea că: $B \cdot C \in H$ oricare ar fi $B, C \in H$.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*
Timp de lucru: 3 ore

Concursul Interjudeţean de Matematică „Teodor Topan”
ediţia a V-a, Şimleu Silvaniei – 20 noiembrie 2010

Clasa a XII-a

1. Determinați funcția derivabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care avem $f(0)=0$ și

$$f'(\sqrt[3]{x})=\begin{cases} x^3-3x^2+x, \text{ dacă x } \in (-\infty;1) \\ x-\ln x, \text{ dacă } x\in (1:+\infty) \end{cases} .$$

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu un număr impar de elemente şi $H\subset G, H\neq G$ un subgrup al său. Să se arate că:

a) $a\in H$ dacă şi numai dacă $a^2\in H$;

b) Există $a\in G\setminus H$, $b\in G\setminus H$ astfel încât $ab\in G\setminus H$.

3. Fie r și s două numere reale. Să se determine numerele reale a și b astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x)=(x^2+ax+b)\operatorname{sgn}(x^2+rx+s)\text{ , oricare ar fi } x\in\mathbb{R},$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$ și determinați o primitivă F a funcției f pe $\mathbb{R}$.

4. Fie $(G,\cdot)$ un grup care conține un singur element de ordinul 2. Dacă notăm cu $a\in G$ elementul respectiv, să se arate că $a\cdot g=g\cdot a$, oricare ar fi $g\in G$.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*
Timp de lucru: 3 ore