



**Concursul Interjudețean de Matematică „Teodor Topan”  
ediția a V-a, Șimleu Silvaniei – 20 noiembrie 2010**

**Clasa a IX-a**

1. Să se demonstreze că pentru orice numere reale  $x, y$  are loc inegalitatea:

$$2(x^4 + y^4) \geq xy(x + y)^2 .$$

2. Fie  $(u_n)_{n \geq 1}$  șirul de numere cu termenul general

$$u_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$$

și  $f(n) = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ , oricare ar fi numărul natural  $n \geq 1$ .

Să se arate că  $f(n+m) - f(n-m) = nm$ , oricare ar fi numerele naturale  $n, m \geq 1$ .

3. Determinați numerele naturale  $n \geq 1$  cu proprietatea că

$$2^n + 5^n + 11^n \text{ se divide cu } 9.$$

4. Fie  $m, n$  două numere naturale prime între ele și

$$q = (m-n)^2 \text{ și } r = m^2 - mn + n^2 .$$

- a) Demonstrați că dacă  $p$  este un număr prim care divide pe  $q$  și  $r$ , atunci  $p$  divide pe  $mn$ , pe  $m-n$ , pe  $m^2$  și pe  $n^2$ .
- b) Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor  $q$  și  $r$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.  
Timp de lucru: 3 ore



**Concursul Interjudețean de Matematică „Teodor Topan”  
ediția a V-a, Șimleu Silvaniei – 20 noiembrie 2010**

**Clasa a X-a**

1. Fie  $k \geq 2$  un număr natural și  $n_1, \dots, n_k$  numere naturale nenule. Să se arate că nu există numere raționale  $x_1, \dots, x_k$  și  $y_1, \dots, y_k$  astfel încât:

$$(x_1 + y_1\sqrt{2})^{2n_1} + \dots + (x_k + y_k\sqrt{2})^{2n_k} = 5 + 4\sqrt{2}.$$

2. Să se rezolve în numere reale ecuația:

$$2^{[x]} = 2x + 1,$$

unde am notat cu  $[x]$ , partea întreagă a numărului real  $x$ .

3. Fie ABC un triunghi. Demonstrați că dacă pentru trei puncte distincte  $M_1, M_2, M_3$  de pe segmentul închis  $[AB]$  are loc relația:

$CM_i^2 \cdot AB^2 = AM_i^2 \cdot BC^2 + BM_i^2 \cdot AC^2$  ( $i=1,2,3$ ), atunci triunghiul ABC este dreptunghic în C.

4. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x + 3y + [2x] + 2[4y] = 18 \\ 5x + y + 2[2x] - [4y] = 0 \end{cases},$$

pe mulțimea numerelor reale pozitive. (Prin  $[a]$  am notat partea întreagă a numărului real  $a$ .)

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.  
Timp de lucru: 3 ore



**Concursul Interjudețean de Matematică „Teodor Topan”  
ediția a V-a, Șimleu Silvaniei – 20 noiembrie 2010**

**Clasa a XI-a**

1. Se consideră matricea  $A_a = \begin{pmatrix} \cos 2a\pi & -\sin 2a\pi \\ \sin 2a\pi & \cos 2a\pi \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$ . Să se arate că:
  - a. Există  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $A_a^k = I_2$  dacă și numai dacă  $a \in \mathbb{Q}$ ;
  - b. Fiind dat un număr  $n \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $n = \min \{k \in \mathbb{N}^* / A_a^k = I_2\}$  dacă și numai dacă  $a = \frac{b}{n}$  cu  $b \in \mathbb{Z}, (b, n) = 1$ .
2. Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ , cu  $x_0 = 0$  și  $x_n = \sqrt{n^2 + x_{n-1}}$ , pentru  $n \geq 1$ .
  - a) Să se arate că  $n \leq x_n \leq n\sqrt{2}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ .
  - c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - n)$ .
3. Fie  $a > 0$  și  $b \in \mathbb{R}$ . Se consideră șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  cu proprietățile:  $x_1 = b$  și  $x_n = x_{n-1} + \ln(e^{x_{n-1}} + a + 1)$ , oricare ar fi  $n \geq 2$ .
  - a) Să se arate că are loc relația  $e^{x_n} = e^{2x_{n-1}} + (a+1)e^{x_{n-1}}$ , oricare ar fi  $n \geq 2$ .
  - b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_{n+1}}}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1) \dots (e^{x_n} + 1)}$ .
4. Se consideră mulțimea  $G$  a matricelor  $A \in M_2(\mathbb{C})$ , de forma  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \neq 0$ . Să se determine submulțimile  $H \subset G$  cu 7 elemente, care au proprietatea că:  $B \cdot C \in H$  oricare ar fi  $B, C \in H$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.  
Timp de lucru: 3 ore



**Concursul Interjudețean de Matematică „Teodor Topan”  
ediția a V-a, Șimleu Silvaniei – 20 noiembrie 2010**

**Clasa a XII-a**

1. Determinați funcția derivabilă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care avem  $f(0) = 0$  și

$$f'(\sqrt[3]{x}) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + x, & \text{dacă } x \in (-\infty; 1) \\ x - \ln x, & \text{dacă } x \in (1; +\infty) \end{cases} .$$

2. Fie  $(G, \cdot)$  un grup cu un număr impar de elemente și  $H \subset G, H \neq G$  un subgrup al său. Să se arate că:

- a)  $a \in H$  dacă și numai dacă  $a^2 \in H$ ;  
b) Există  $a \in G \setminus H, b \in G \setminus H$  astfel încât  $ab \in G \setminus H$ .

3. Fie  $r$  și  $s$  două numere reale. Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$  astfel încât funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin:

$$f(x) = (x^2 + ax + b) \operatorname{sgn}(x^2 + rx + s), \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

admite primitive pe  $\mathbb{R}$  și determinați o primitivă  $F$  a funcției  $f$  pe  $\mathbb{R}$ .

4. Fie  $(G, \cdot)$  un grup care conține un singur element de ordinul 2. Dacă notăm cu  $a \in G$  elementul respectiv, să se arate că  $a \cdot g = g \cdot a$ , oricare ar fi  $g \in G$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.  
Timp de lucru: 3 ore