Concursul Interjudețean de Matematică „Teodor Topan”
ediția a V-a, Şimleu Silvaniei – 20 noiembrie 2010

Clasa a V-a

1. Peste 14 ani Andrei va avea vârsta pe care o avea acum 12 ani tatăl său, iar peste 10 ani vârsta lui Andrei va fi de două ori mai mică decât vârsta tatălui. Ce vârstă au acum Andrei şi tatăl său ?

2. Fie $m \geq 2$ un număr natural şi $a = 5^0 + 5^1 + 5^2 + \ldots + 5^m$.

a) Aflați ultimele două cifre ale numărului $4a$.

b) Demonstrați că dacă $m+1$ se divide cu 3, atunci a se divide cu 31.

c) Ce resturi se pot obține prin împărțirea lui a la 31?

3. a) Găsiți trei pătrate perfecte de forma $3^m + 3^n$, unde m, n sunt numere naturale.

b) Demonstrați că nu există pătrate perfecte de forma $6^m + 6^n$, unde unde m, n sunt numere naturale.

4. Numerele 31459, 112358 au proprietatea că fiecare cifră a lor, începând cu a 3-a, este egală cu suma precedentelor două cifre.

a) Aflați cel mai mare număr de 6 cifre cu această proprietate.

b) Aflați cel mai mare număr cu această proprietate.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*
Timp de lucru: 2 ore

Concursul Interjudețean de Matematică „Teodor Topan”
ediția a V-a, Şimleu Silvaniei – 20 noiembrie 2010

Clasa a VI-a

1. Unghiurile adiacente $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$ au proprietatea că $m(\sphericalangle AOB)=3\cdot m(\sphericalangle BOC)$.
Aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$, ştiind că $m(\sphericalangle AOC)=160^0$.

2. Într-o familie sunt 6 frați şi fiecare are vârsta exprimată printr-un număr prim. Aflați vârstele celor şase frați, ştiind că frații mai mari au respectiv cu 2, 6, 8, 12 şi 14 ani mai mult decât cel mic.

3. a) Aflați cel mai mic multiplu de 9 din şirul: 1, 12, 127, 1271, 12712, 127127, 1271271, 12712712,…
b) Câte cifre are cel de-al 10-lea multiplu de 9 din acest şir ?

4. Fie $A=\overline{abcde1}$, un număr de 6 cifre cu proprietatea că A se divide cu fiecare din cifrele a,b,c,d,e. Demonstrați că mulțimea primelor cinci cifre ale numărului A are cel mult trei elemente.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*
Timp de lucru: 2 ore

Concursul Interjudețean de Matematică „Teodor Topan”
ediția a V-a, Şimleu Silvaniei – 20 noiembrie 2010

Clasa a VII-a

1. În patrulaterul convex $ABCD$ notăm cu M mijlocul laturii BC şi cu N mijlocul laturii CD. Fie P intersecția dreptelor AM şi DB, iar Q intersecția dreptelor AN şi DB. Demonstrați că $DQ = QP = PB$ dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

2. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului dreptunghic ABC $(m(\sphericalangle A) = 90^o)$ se consideră respectiv punctele K, L, M, N astfel încât $m(\sphericalangle KCB) = m(\sphericalangle LCK) = \frac{1}{3} m(\sphericalangle ACB)$ şi $m(\sphericalangle MBC) = m(\sphericalangle NBM) = \frac{1}{3} m(\sphericalangle ABC)$. Fie P punctul de intersecție a dreptelor BM şi CK, iar Q punctul de intersecție a dreptelor BN şi CL. Demonstrați că $QP = QL = QN$.

3. a) Arătați că $\dfrac{2^{n-1}}{\left(2^n+1\right)\left(2^{n+1}+1\right)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^n+1} - \dfrac{1}{2^{n+1}+1}\right)$

b) Determinați numărul natural nenul n astfel încât:

$$\frac{1}{3\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 9} + \frac{4}{9\cdot 17} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{\left(2^n+1\right)\left(2^{n+1}+1\right)} = \frac{2^{2010}-1}{3\left(2^{2011}+1\right)}$$

4. Un număr natural $m > 1$ se numeşte perfect dacă suma tuturor divizorilor naturali ai săi este egală cu $2m$.

a) Arătați că dacă $2^n - 1$ este un număr prim, atunci numărul $2^{n-1}(2^n - 1)$ este perfect (de exemplu, numărul 28 este perfect).

b) Demonstrați că dacă m este un număr perfect, iar $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = m$ sunt divizorii săi pozitivi, atunci $\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} + \ldots + \dfrac{1}{d_k} = 2$.

Concursul Interjudețean de Matematică „Teodor Topan"
ediția a V-a, Şimleu Silvaniei – 20 noiembrie 2010

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*
Timp de lucru: 3 ore

Clasa a VIII-a

1. Fie $a > 0$. Determinați numerele reale $x_1, x_2, ..., x_{2010}$ ştiind că

$$2a\left(\sqrt{x_1^2 - a^2} + \sqrt{x_2^2 - a^2} + ... + \sqrt{x_{2010}^2 - a^2}\right) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{2010}^2 .$$

2. Demonstrați că numărul $\overline{a_1 a_2 ... a_n 25}$ este pătrat perfect dacă şi numai dacă $\overline{a_1 a_2 ... a_n}$ este produsul a doua numere naturale consecutive (de exemplu, numerele 225, 7225, 11025 sunt pătrate perfecte).

3. Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D astfel încât $AB \perp AC, DB \perp AB, DC \perp AC$. Notăm cu E şi F, respectiv mijloacele segmentelor $[AD]$ şi $[BC]$.
Demonstrați că $EF \perp (ABC)$.

4. Numerele reale x, y, z, t au proprietatea că $x^{2010} + y^{2010} + z^{2010} + t^{2010} = 1$ şi există $k \in \mathbb{N},\ k > 2010$, impar astfel încât $x^k + y^k + z^k + t^k = 1$.
Arătați că $x^n + y^n + z^n + t^n = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*
Timp de lucru: 3 ore