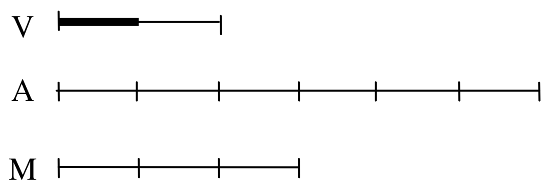
CLASA a V-a

SOLUȚII ȘI BAREME

1. La un campionat de fotbal, Andrei, Mihai și Vasile au marcat împreună 22 de goluri. Andrei a marcat de trei ori mai multe goluri decât Vasile, iar Mihai jumătate din numărul golurilor marcate de Andrei. Câte goluri a marcat fiecare?



3 p

Dacă luăm o jumătate din segmentul care reprezintă numărul golurilor marcate de Vasile , 1p
observăm că la Andrei sunt 6 astfel de "bucăți" iar la Mihai 3, în total 11 "bucăți" . . . 1 p
Deci "bucata" respectivă reprezintă 22: 11 = 2 (goluri) . . . . . . 1 p
Prin urmare Vasile a marcat 4 goluri, Andrei 12 și Mihai 6. . . . . 1 p

1. Să se determine numerele naturale $\overline{abc}$, scrise în baza 10, astfel încât
$$\overline{abc} = \overline{cba} + \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ca} + \overline{ac} + \overline{bc} + \overline{cb}.$$

Relația dată conduce la $100a + 10b + c = 23a + 32b + 122c$

Adică $77a = 22b + 121c \iff 7a = 2b + 11c$

Pentru că $7a \le 7 \cdot 9 = 63 \Rightarrow c \le 5$

$c = 1$, duce la $7a = 2b + 11 = 2b + 4 + 7 = 2(b+2) + 7$ de unde rezultă $(b+2)\,\vdots\,7$,
adică $b = 5$, $7a = 21$ și $a = 3$; avem 351 1p

$c = 2$, duce la $7a = 2b + 22 = 2b + 8 + 14 = 2(b+4) + 14$, apoi $(b+4)\,\vdots\,7$
prin urmare $b = 3$ și $a = 4$; avem 432 1p

$c = 3$, duce la $7a = 2b + 33 = 2b + 5 + 28$, $(2b+5)\,\vdots\,7$, $b = 1$ și $a = 5$
$= 2b + 35 - 2 = 2(b-1) + 35$, $(b-1)\,\vdots\,7$, $b = 8$ și $a = 7$
Se obțin numerele 513 și 783 1p

$c=4$, $7a = 2b + 44 = 2(b+1) + 42$, $b=6$ și $a = 8$; avem 864 1p

$c=5$, $7a = 2b + 55 = 2b + 6 + 49 = 2(b+3) + 49$, cu $b=4$ și $a=9$; 945 soluție 1p

3. Există 5 numere naturale *a , b , c , d* și *e* cu proprietatea că suma a oricăror patru dintre ele dă restul 1 prin împărțirea la 4 ?

Presupunem că există astfel de numere, prin urmare am avea:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c+d = M_4 + 1 \\ a+b+c+e = M_4 + 1 \\ a+b+d+e = M_4 + 1 \\ a+c+d+e = M_4 + 1 \\ b+c+d+e = M_4 + 1 \end{array}\right\} 5p$$

Dacă adunăm membru cu membru obținem $4(a+b+c+d+e) = M_4 + 5 = M_4 + 1$ 1p

Ceea ce este imposibil, prin urmare nu există astfel de numere. 1p

CLASA a VI-a

SOLUȚII ȘI BAREME

1. Determinați toate numerele naturale nenule care împărțite la 17 dau câtul egal cu restul și împărțite la 23 dau , de asemenea , câtul egal cu restul.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ așa încât $n = 17 \cdot q + q$, $q < 17$, $q \in \mathbb{N}$ . . . . . . 1 p

$n = 23 \cdot r + r$, $r < 23$, $r \in \mathbb{N}$ . . . . . . 1 p

de unde $n = 18q$ cu $0 \le q \angle 17$ . . . . 0,5 p

$n = 24r$ cu $0 \le r \angle 23$ . . . . 0,5 p

Din $18q = 24r$ rezultă $3q = 4r$ . . . . 1,5 p

Deci $q = 4a$, $r = 3a$ cu $a \in \mathbb{N}$ și $a \le 4$ . . . . . 1 p

Rezultă $n = 18 \cdot 4a = 72a$, $a = 0, 1, 2, 3, 4$ . . . . 1 p

Deci $n \in \{0, 72, 144, 216, 288\}$ . . . . 0,5 p.

2. Determinați *m* , *n* numere naturale astfel încât $2^m - 2^n = 120$.

Deoarece $2^m > 2^n$ rezultă $m > n$. Fie $p = m - n \in \mathbb{N}$ . . . . . . 2 p

Atunci $2^{n+p} - 2^n = 120 \Leftrightarrow 2^n(2^p - 1) = 2^3 \cdot 15$ . . . . 2 p

Pt. că $2^p - 1$ este impar, este necesar ca

$$\begin{cases} 2^n = 2^3 \\ 2^p - 1 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ 2^p = 16 = 2^4 \end{cases} \Leftrightarrow n = 3 \text{ și } p = 4$$ . . . . 2 p

Deci $m = n + p = 3+4 = 7$ . . . . 1 p

3. Arătați că numărul $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2010 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010}\right)$

este natural și se divide cu 2011.

$x = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2010 + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2010 + 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2010 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2008 \cdot 2009 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \in \mathbb{N}$ 2p

Apoi:

$$x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2010\left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2010}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2009}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1005} + \frac{1}{1006}\right)\right]$$ 2p

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2010\left[\frac{2011}{1 \cdot 2010} + \frac{2011}{2 \cdot 2009} + \ldots + \frac{2011}{1005 \cdot 1006}\right] =$$ 1p

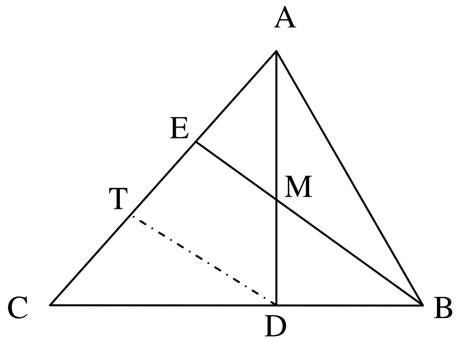
$$= 2011[2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2008 \cdot 2010 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1004 \cdot 1007 \cdot \ldots \cdot 2010] =$$ . . . 1p

$= 2011 \cdot a$, $a \in \mathbb{N}$ de unde avem că 2011 îl divide pe *x*. 1p

CLASA a VII-a

SOLUȚII ȘI BAREME

1. În triunghiul ABC, M este mijlocul înălțimii AD ($D \in (BC)$), iar $E \in (AC)$ astfel încât $EC = 2AE$. Arătați că punctele B, M, E sunt coliniare dacă și numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.



Considerăm B, M și E sunt coliniare și construim $DT \| BE$ 1p

Atunci în ΔADT, ME este linie mijl. și $ET = AE = \frac{1}{2} EC$ 0,5p

De unde avem că T e mijlocul lui EC, adică DT linie mijlocie în ΔBCE și atunci D e mijlocul lui BC. 1p

Cum AD e înălțime și mediană, avem triunghi isoscel, adică $[AB] \equiv [AC]$. 1p

Reciproc; presupunem că $[AB] \equiv [AC]$, adică triunghiul ΔABC este isoscel. Cum AD este înălțime va fi și mediană, adică D este mijlocul lui BC. 1,5p

Construim $DT \| BE$ $\Rightarrow$ DT linie mijlocie în ΔBEC, T fiind mijlocul lui EC $\Rightarrow$ TE=AE 1p

Deci în ΔADT, ME este linie mijlocie și atunci $DT \| ME$. Dar prin E avem o singură paralelă la DT.
Prin urmare B, M și E coliniare. 1p

2. Să se determine $a, b \in \mathbb{N}$ știind că 1997 împărțit la a dă restul $2b$-a și împărțit la b dă restul $2a$-10.

Resturile sunt numere naturale sunt numere naturale, deci $2a - 10 \geq 0$, $2b - 9 \geq 0$ de unde avem că $a \geq 5$ și $b \geq 5$. 1p

Cum restul e mai mic decât împărțitorul, $2b - 9 \angle a$ iar $2a - 10 \angle b$ 1p

Atunci b>2a-10>2(2b-9)-10 $\Rightarrow$b>4b-28$\Rightarrow$3b<28 adică $b \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ 1p

În plus, b nu poate fi par (restul împ. lui 1997 la b este 2a-10 care este par) deci $b \in \{5, 7, 9\}$ 1p

Dacă b=5, avem 1997=5$\cdot$399+2, adică a=6 și cum 1997=6$\cdot$332+5, 2b-9=5 adică b=7$\neq$5.
Valoarea nu convine 1p

Dacă b=7, avem 1997=7$\cdot$285+2, adică a=6, din nou 1997=6$\cdot$332+5, 2b-9=5 adică b=7, deci a=6 și b=7 1p

Dacă b=9, avem 1997=9$\cdot$221+8, adică a=9. Avem 1997=9$\cdot$221+8 adică 2b-9=8, imposibil.
În concluzie a=6 și b=7. 1p

3. Dacă x, y, z, t sunt numere reale, atunci

$$(-x + y + z + t)^2 + (x - y + z + t)^2 + (x + y - z + t)^2 + (x + y + z - t)^2 + \frac{1}{4} \geq x + y + z + t$$

Precizați cazul de egalitate.

După ridicările la pătrat, se obține inegalitatea $4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - x - y - z - t + \frac{1}{4} \geq 0$ 2p

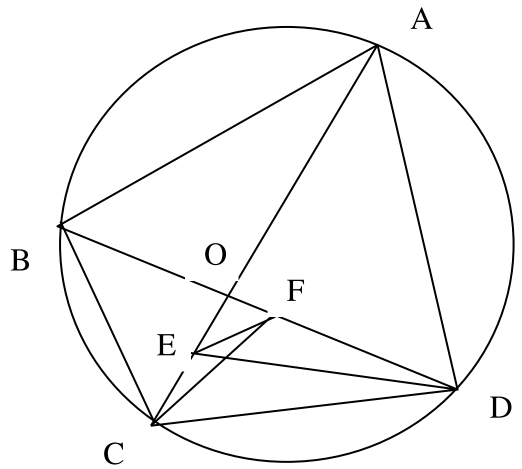
care este echivalentă cu $\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2y - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2z - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2t - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$ ineg evidentă 4p

Pentru $x = y = z = t = \frac{1}{8}$ se realizează egalitatea 1p

CLASA a VIII-a

SOLUȚII ȘI BAREME

1. Fie patrulaterul inscriptibil *ABCD*. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, $E \in (OC)$ și $F \in (BD)$, să se demonstreze că $EF \parallel AB$ dacă și numai dacă $\angle ADE \equiv \angle BCF$.



Presupunem că EF∥AB, atunci $D\hat{E}F \equiv B\hat{A}O$ (1) 1p

ABCD inscriptibil $\Rightarrow$ $B\hat{A}O \equiv B\hat{D}C$ (2) 0,5p

Din (1) și (2) rezultă $B\hat{D}C \equiv O\hat{E}F$ ceea ce conduce la faptul că patrulaterul DCEF este inscriptibil, deci $E\hat{D}F \equiv E\hat{C}F$ (3) 1,5p

Cum $B\hat{C}A \equiv B\hat{D}A$, împreună cu (3) dă $A\hat{D}E \equiv B\hat{C}F$ 0,5p

Reciproc. Avem $A\hat{D}E \equiv B\hat{C}F$ (4), cum $B\hat{C}A \equiv B\hat{D}A$ (5) 0,5p

se ajunge la $E\hat{C}F \equiv E\hat{D}F$ și rezultă că CDEF este inscriptibil

Prin urmare $C\hat{D}B \equiv O\hat{E}F$ 2p

Din $B\hat{D}C \equiv B\hat{A}C \Rightarrow O\hat{E}F \equiv B\hat{A}D$ și așa rezultă EF∥AB 1p

2. Demonstrați că pentru orice *n* număr natural are loc inegalitatea

$$\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} \angle \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}.$$

Ridicăm la pătrat fiecare membru al inegalității: 1p

$$n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n}}} \angle \frac{1+2\sqrt{1+4n}+1+4n}{4}$$

$$n+\sqrt{n+\cdots\sqrt{n+\sqrt{n}}} \angle \frac{1+2n+\sqrt{1+4n}}{2}, \ sau \quad \sqrt{n+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n}}} \angle \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$$ 3p

Obs că membrul drept rămâne același. Ridicăm succesiv la pătrat și ajungem la 1p

$\sqrt{n} \angle \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2} \Leftrightarrow 0 \angle \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$, inegalitate evidentă. Prin urmare relația este adevărată. 2p

3. Fie *a* și *n* două numere naturale nenule. Arătați că numărul $x_n(a) = 1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{12n-1}$ se divide prin $(a+1)(a^2+1)(a^8+a^4+1)$.

Grupăm câte patru termeni : 1p

$x_n(a) = (1+a+a^2+a^3)+a^4(1+a+a^2+a^3)+\ldots+a^{12n-4}(1+a+a^2+a^3) =$

$= (a+1)(a^2+1)(1+a^4+a^8+\ldots+a^{12n-4}) = (a+1)(a^2+1)\,y_n(a)$ 2p

În $y_n(a)$ grupăm câte 3 termeni și avem: 1p

$y_n(a) = 1+a^4+a^8+a^{12}(1+a^4+a^8)+\ldots+a^{12n-12}(1+a^4+a^8) =$ 1p

$= (1+a^4+a^8)(1+a^{12}+\ldots+a^{12n-12}) = (1+a^4+a^8)z_n(a)$ 1p

Deci $x_n(a) = (a+1)(a^2+1)(a^8+a^4+1)z_n(a)$ ceea ce arată că $x_n(a)$ este divizibil cu $(a+1)(a^2+1)(a^8+a^4+1)$. 1p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19 - 21 noiembrie 2010)
CLASA a IX a

1. Schimbăm x în $-x$ în relația dată ……………………………………………………1p

(2) $f(1+x)+af(1-x)=(a+1)x^2-2(a-1)x+2(a+1)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ ……..…1p

Înmulțim relația dată cu –a și o adunăm cu (2)……………………………………....1p

Obținem

(3) $(1-a^2)f(1+x)=(a+1)(1-a)x^2+2(1-a)(1+a)x+2(1-a)(1+a)$ …………1p

Cum $a\neq 1$, împărțim (3) cu $1-a^2$ și rezultă că $f(1+x)=x^2+2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$ … ….1p

Înlocuind pe x cu $x-1$ în (4), ……………………………………………………..1p

găsim $f(x)=(x-1)^2+2(x-1)+2=x^2+1$ ……...1p

2. Notăm $a=x+2y, b=y+2z, c=z+2x$ și avem $a+b+c=3(x+y+z)$ ………...1p

Inegalitatea devine (1) $a^4+b^4+c^4\geq 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4$ …………………………………1p

Se cunoaște inegalitatea $3(m^2+n^2+p^2)\geq(m+m+p)^2$ ……………………………2p

Punând $m=a^2, n=b^2, p=c^2$ avem $3(a^4+b^4+c^4)\geq(a^2+b^2+c^2)^2\geq\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}\right]^2$

2p

De unde $a^4+b^4+c^4\geq\frac{(a+b+c)^4}{27}$ ….. ……………………………………………...1p

3. Avem $\overrightarrow{MP}=\frac{\overrightarrow{MC}+\alpha\overrightarrow{MD}}{\alpha+1}$ …. ……………………………………………………..1p

$=\frac{1}{\alpha+1}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\alpha\overrightarrow{MA}+\alpha\overrightarrow{AD}\right)=$

$=\frac{1}{\alpha+1}\left(\overrightarrow{BC}+\alpha\overrightarrow{AD}\right)$. … ………………………………………………………1p

Analog $\overrightarrow{QN}=\frac{\overrightarrow{QB}+\alpha\overrightarrow{QC}}{\alpha+1}$ … ……………………………………………………..1p

$=\frac{1}{\alpha+1}\left(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{QD}+\alpha\overrightarrow{DC}\right)=$

$=\frac{1}{\alpha+1}\left(\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{DC}\right)$. … ………………………………………………………1p

Acum putem scrie $\left|\overrightarrow{MP}\right|+\left|\overrightarrow{QN}\right|=\frac{1}{\alpha+1}\left|\overrightarrow{BC}+\alpha\overrightarrow{AD}\right|+\frac{1}{\alpha+1}\left|\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{DC}\right|$ … …………1p

$\leq\frac{1}{\alpha+1}\left(\left|\overrightarrow{BC}\right|+\alpha\left|\overrightarrow{AD}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|+\alpha\left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$. …. ……………………………………….2p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19 - 21 noiembrie 2010)

CLASA a X a

1. Demonstrăm prin inducție matematică că (1) $\frac{x^n+y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, n\in\mathbb{N}$ 1p

Verificare pentru $n=1$ 1p
Presupunem (1) adevărată pentru n și o demonstrăm pentru $n+1$, adică

(2) $\frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1}$ 1p

Avem $\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \cdot \frac{x+y}{2} \leq \frac{x^n+y^n}{2}\cdot\frac{x+y}{2}$ 1p

Acum demonstrăm că $\frac{x^n+y^n}{2}\cdot\frac{x+y}{2} \leq \frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{2}$ 1p

Echivalent cu $x^{n+1}+x^n y+xy^n+y^{n+1} \leq 2x^{n+1}+2y^{n+1}$

Sau $(x^n-y^n)(x-y)\geq 0$, evidentă. 1p

Acum, avem $1+\frac{(x+y)^1}{x+y}+\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+...+\frac{(x+y)^n}{x^n+y^n} \leq 1+2+2^2+...+2^{n-1}=2^n$ 1p

2. Din $0\in[-1;1]$, avem că $\max\limits_{x\in[-1;1]}\left|ax^2+bx-1\right| \geq \left|a\cdot 0^2+b\cdot 0-1\right|=1, \forall a,b\in\mathbb{R}$ 1p

Putem scrie $\max\limits_{x\in[-1;1]}\left|ax^2+bx-1\right|\leq 1$, adică $-1\leq ax^2+bx-1\leq 1$, echivalent cu

$ax^2+bx\geq 0, ax^2+bx-2\leq 0, \forall x\in[-1;1]$ 1p

Pentru $\alpha\in[0;1]$, înlocuind $x=\alpha, x=-\alpha$ în $ax^2+bx\geq 0 \Leftrightarrow a\alpha^2+b\alpha\geq 0$,

$a\alpha^2-b\alpha\geq 0$ 1p

De unde $\alpha\geq 0$ și b aparține tuturor intervalelor $[-a\alpha;a\alpha], \alpha\in[0;1]\Rightarrow b=0$. 1p

Rezultă $ax^2-2\leq 0, \forall x\in[-1;1]$ 1p

Aceasta este îndeplinită pentru că $a=0$, iar pentru $a>0$ condiția devine

$[-1;1]\subset\left[-\sqrt{\frac{2}{a}};\sqrt{\frac{2}{a}}\right]$, adică $a\leq 2$. 1p

Așadar, mulțimea cerută este $[0;2]\times\{0\}$. 1p

3. Pentru $p=2$ avem 9 + 19 = 28, care nu este pătrat perfect. … …………… … 0.5p

Pentru $p\geq 3$ numerele prime pot fi de formele $4k+1, 4k+3, k\in\mathbb{N}^*$ 0.5p

Dacă $p=4k+1$, atunci $3^p+19(p-1)=3\cdot 81^k+4\cdot 19k\equiv 3 \pmod 4$ 1p

Care ne arată că nu avem pătrat perfect 0.5p

Dacă $p=4k+3$, atunci 0.5p

$3^p+19(p-1)\equiv 3-19 \pmod p \equiv -16 \pmod p$, ... 1p

de unde $p\,|\,n+16$ 1p

Dacă $n=m^2, m\in\mathbb{N}^*$, atunci $p\,|\,n^2+4^2$ 1p

Cum p este de forma $4k+3$, rezultă $p\,|\,n$ și $p\,|\,4$, ceea ce este imposibil. 0.5p

Așadar, pentru p prim nu există pătrate perfecte de forma dată. 0.5p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19 - 21 noiembrie 2010)
CLASA a XI a

1. Se observă că $A_n = B \cdot C \cdot D$, unde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{pmatrix}$$ ………………………..… 3p

Cum $\det(A_n) = \det B \cdot \det C \cdot \det D$ și ……………………………………….... 1p

$\det B = (b-a)(c-a)(c-b)$ ……………………………………………………1p

$\det C = a^n b^n c^n$ ……………………………………………………………..1p

$\det D = -(b-a)(c-a)(c-b)$ ………………………………………………... 1p

Rezultă cerința problemei.

2. Aplicăm $\frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, x, y \ge 0$. ……………………………………..… 2p

ΔABC ascuțitunghic implică $\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$ pozitive și avem

$$\frac{a\sqrt{\sin 2B} + b\sqrt{\sin 2A}}{2} \le \sqrt{\frac{a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A}{2}} = \sqrt{2S}$$ ……………………………. 1p

Deoarece $a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = \frac{2S \sin A \sin 2B}{\sin B \sin C} + \frac{2S \sin B \sin 2A}{\sin A \sin C} =$

$$= 4S \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\sin C} = 4S \frac{\sin(A+B)}{\sin C} = 4S$$ ………………………………. 3p

Scriem relațiile analoage și sumând obținem inegalitatea dată. ………………….… 1p

3. Din $x_{n+1} - x_n = a^{-x_n} > 0$ rezultă că (x_n) este strict crescător. ………………….. 0.5p

Fie $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, trecem la limită în relația de recurență și obținem $x = x + a^{-x}$, de unde $x = \infty$. ……………………………………………………………………………...0.5p

Avem $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\ln(n+1) - \ln n} =$ ……………………………………………1p

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{-x_n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{na^{-x_n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$$ ………………………………………………..…1p

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{a^{x_{n+1}} - a^{x_n}} =$$ ……………………………..…………………1p

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{x_n + a^{-x_n}} - a^{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{x_n}\left(a^{a^{x_n}} - 1\right)} =$$ …………………………………………...1p

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{-x_n}}{a^{a^{-x_n}} - 1} \overset{y=a^{-x_n}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{y}{a^y - 1} =$$ …………………………………………………1p

$$= \frac{1}{\ln a}.$$ ……………………………………………………………………….…1p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"MATEMATICA DE DRAG"
EDIȚIA a V-a (19 - 21 noiembrie 2010)
CLASA a XII a

1. Fie $B = A - \lambda_1 I_2, C = A - \lambda_2 I_2$. ………………………………………………….. 1p

Avem $BC = CB = A^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) A + \lambda_1\lambda_2 = O_2$, ……………………………….... 2p

conform teoremei Cayley-Hamilton ……………………………………………….. 1p

Dar $B - C = (\lambda_1 - \lambda_2) I_2$ ……………………………………………………..… 1p

De unde $(B-C)^{2n} = B^{2n} + C^{2n} = (\lambda_2 - \lambda_1)^{2n} I_2$, ceea ce conduce la egalitatea din enunț. ……………………………………………………………………………….. 2p

2. Avem $f(x) = \dfrac{1 + e^x + 6e^{2x} + 4e^{3x} + e^{4x}}{1 + e^{4x}} =$

$= 1 + 4\dfrac{e^x(1+e^{2x})}{1+e^{4x}} + 6\dfrac{e^{2x}}{1+e^{4x}}$ ……………………………………………………… 1p

Rezultă că $\int f(x)\,dx = x + 4I_1 + 6I_2$ …………………………………………….. 0.5p

Unde $I_1 = \int \dfrac{e^x(1+e^{2x})}{1+e^{4x}}dx$ și $I_2 = \int \dfrac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$

Pentru a calcula I_1 punem $e^x = t$ ………………………………………………... 0.5p

și obținem $I_1 = \int \dfrac{(1+t^2)}{1+t^4}dt = \int \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)}{t^2 + \dfrac{1}{t^2}}dt$ ……………………………………….... 1p

Acum, punem $t - \dfrac{1}{t} = u$ ……………………………………………………………1p

și obținem $I_1 = \int \dfrac{du}{u^2+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{\sqrt{2}} + C$ ……………………………………...0.5p

De unde $I_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^x - \dfrac{1}{e^x}\right) + C'$ ……………………………………......0.5p

Pentru a găsi I_2 punem $e^{2x} = y$ ……………………………………..................0.5p

și obținem $I_2 = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dy}{1+y^2} = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} y + C$ …………………………………......0.5p

În final, avem $\int f(x)dx = x + 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^x - \dfrac{1}{e^x}\right) + 3\operatorname{arctg} e^{2x} + C$ ……………0.5p

3. Ridicăm ambii membri la puterea $n(n+1)(n+2)$ și obținem $\dfrac{((n+2)!)^{n(n+1)} \cdot (n!)^{(n+1)(n+2)}}{((n+1)!)^{2n(n+2)}} < \left(\dfrac{e}{3}\right)^n$ ……………………………………………...…1p

Notăm membrul *I* cu $\varphi(n)$ și avem $\varphi(n) = \left(\dfrac{(n+2)!n!}{(n+1)!}\right)^{n(n+1)} \left(\dfrac{n!}{(n+1)!}\right)^{2n} (n!)^2$……1p

$$=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n(n+1)}\frac{(n!)^2}{(n+1)^{2n}}=\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^n\frac{(n!)^2}{(n+1)^{2n}}<e^n\frac{(n!)^2}{(n+1)^{2n}}=\left(\frac{e}{3}\right)^n\frac{3^n(n!)^2}{(n+1)^{2n}}$$ 1p

Acum, prin inducție demonstrăm că (1) $\frac{3^n(n!)^2}{(n+1)^{2n}}<1$ 1p

Pentru $n = 1$, avem că $\frac{3}{4}<1$ 1p

Presupunem (1) adevărată pentru n și să arătăm că are loc și pentru $n + 1$, adică

$\frac{3^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(n+2)^{2n+2}}<1$ 1p

Avem $\frac{3^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(n+2)^{2n+2}}=\frac{3^n(n!)^2}{(n+1)^{2n}}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n}<1$ 1p