CLASA A VI-A

Problema 1.

a) Determinaţi numărul natural prim *n* ştiind că $n+2$ este un divizor comun al numerelor $8n^2+3n+5$ şi $6n^2-24$.

Gheorghe Radu, Rm. Vâlcea

b) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ notăm cu p_n al n – lea număr natural prim. (De exemplu $p_1=2,\ \ p_2=3$ etc).

b₁) Aflaţi $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care $p_{n+1}-p_n=1$;

b₂) Determinaţi $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care $p_n \geq 2n+1$.

Nicolae Bourbăcuţ, Hunedoara

BAREM:

a) $\left.\begin{array}{c}(n+2)\,/\,(8n^2+3n+5)\\ (n+2)/6n^2-4\end{array}\right\} \Rightarrow (n+2)\,/\,[3\cdot(8n^2+3n+5)-8\cdot(6n^2-4)]=9n+11$

$\left.\begin{array}{c}(n+2)/(9n+111)\\ (n+2)\,/\,9(n+2)\end{array}\right\} \Rightarrow n+2/9n+111-9n-18 \Rightarrow (n+2)\,/\,93$ **1p**

Deci $(n+2) \in \{1,3,31,93\}$

Cum $n \geq 2 \Rightarrow n+2 \geq 4 \Rightarrow (n+2) \in \{31,93\} \Rightarrow n \in \{29,91\}$ **1p**

Cum *n* este număr prim, iar 91 = 7 ·13 ⇒ $\boldsymbol{n=29}$.. **1p**

b₁) Cum $p_{n+1}-p_n=1 \Rightarrow$ cele două numere au parități diferite ⇒ p_n = 2, deci ***n* = 1**................. **2p**

b₂) Avem $p_4=7<2\cdot4+1$ și $p_5=11\geq 2\cdot5+1$.

Pentru orice $n \geq 2,\ p_{n+1}-p_n \geq 2 \Rightarrow p_{n+1}-p_5 \geq 2(n-5),\ \forall n \geq 5$ **1p**

Finalizare: $p_n \geq 2n+1$ pentru orice $n \geq 5$, deci $\boldsymbol{n \in \{5,6,7,8,\ldots\}}$ **1p**

Problema 2.

Fie mulţimea E = {3, 7, 11, 15, 19, ..., 63, 67}.

a) Calculaţi suma elementelor mulţimii E ;

b) Poate fi împărţită mulţimea E în trei submulţimi disjuncte două câte două, astfel încât suma elementelor din fiecare submulţime să fie aceeaşi ? Justificaţi !

c) Dacă A este o submulţime a lui E formată din 11 elemente, demonstraţi că mulţimea A conţine două elemente a căror sumă este divizibilă cu 29.

Constantin Bărăscu, Râmnicu Vâlcea

BAREM:

a) Elementele din E sunt de forma $x_k = 4k+3,\ 0 \le k \le 16$, deci cardE = 17........................ **1p**

$S = (4\cdot 0+3)+(4\cdot 1+3)+(4\cdot 2+3)+\cdots+(4\cdot 16+3) =$
$= 4(1+2+\cdots+16)+3\cdot 17 = 44\cdot\frac{16\cdot 17}{2}+3\cdot 17 = 595$ **1p**

b) Dacă ar fi posibilă construcția celor 3 submulțimi care să verifice cerințele problemei, fie k suma elementelor fiecăreia dintre aceste submulțimi. Cum suma elementelor mulțimii E este egala cu suma elementelor celor trei mulțimi, avem că $3k = 595$ (fals, $3 \nmid 595$) **2p**

c) Formăm submulțimile $M_1 = \{3,35\}, M_2 = \{7,51\}, M_3 = \{11,43\}, \dots, M_7 = \{27,31\}$, fiecare dintre aceste mulțimi având suma elementelor egală cu $58 \vdots 29$ și submulțimile $M_8 = \{59\}, M_9 = \{63\}$ și $M_{10} = \{67\}$.. **1p**

Alegând câte un element din fiecare cele 7 mulțimi care au câte 2 elemente (7 numere), adăugând și numerele 59, 63 și 67 (3 numere) (elementele mulțimilor M_8 , M_9 și M_{10}), al 11-lea număr va trebui să "completeze" una din mulțimile care au câte 2 elemente.
Această mulțime conţine cele 2 numere căutate **2p**

CLASA A VI-A

Problema 3.

Se consideră punctele coliniare $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2011}$ astfel încât $A_1A_2 = 1$ cm, $A_2A_3 = 2$ cm, ..., $A_{2010}A_{2011} = 2010$ cm.

a) Arătaţi că există o ordine a punctelor A_1, A_2, A_3, A_4 şi A_5 astfel încât $A_1 = A_5$;

b) Determinaţi o ordine de aşezare a punctelor $A_1, A_2, \ldots, A_{2009}$ astfel încât $A_1 = A_{2009}$;

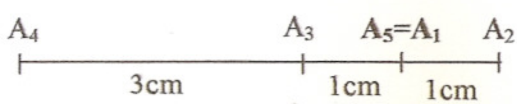
c) Arătaţi că oricum am alege o ordine a tuturor celor 2011 puncte, A_1 şi A_{2011} nu coincid.

Cecilia Deaconescu, Piteşti şi Dumitru Dobre, Rm. Vâlcea

BAREM:

Fără a restrânge generalitatea problemei, considerăm dreapta determinată de cele 2011 puncte ca fiind una orizontală, pe care fixăm punctul A_1 și pe care considerăm ca fiind sens pozitiv sensul spre dreapta.

a) Ordinea $A_4 - A_3 - \boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{A_5} - A_2$ reprezintă soluția problemei, conform desenului de mai jos, întrucât $A_1A_2 + A_4A_5 = A_2A_3 + A_3A_4$ (1 + 4 = 2 + 3) **2p**



b) Cum (4k + 1) + (4k + 4) - (4k + 2) - (4k + 3) = 0, avem

$1 + 4 - 2 - 3 = 5 + 8 - 6 - 7 = \ldots = 2005 + 2008 - 2006 - 2007 = 0$ **1p**

Pentru cele 2009 puncte (și 2008 lungimi de segmente) putem face o astfel de grupare (2008 ⋮ 4)

Atunci, alegând ordinea la dreapta în raport cu A_1 avem:

La "dreapta" lui A_1: $A_2, A_5 = A_1, A_6, A_9 = A_1, A_{10}, A_{13} = A_1, \ldots, A_{2006}, A_{2009} = A_1$, iar

La "stânga" lui A_1: $A_3, A_4, A_7, A_8, A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{2007}, A_{2008}$ **1p**

c) Pentru orice ordine considerată, "lungimea segmentului" $A_1A_{2011} = 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \cdots \pm 2010 =$
$= (1 \pm 3 \pm 5 \pm \cdots \pm 2009) + (\pm 2 \pm 4 \pm 6 \pm \cdots \pm 2010)$.. **1p**

Cum suma unui număr impar de numere impare este un număr impar, avem că primul "termen" al sumei este impar **1p**

Cum al doilea "termen" al sumei este un număr par, avem că $A_1A_{2011} \neq 0$, deci $A_1 \neq A_{2009}$ **1p**

CLASA A VI-A

Problema 4.

Se consideră semidreptele $[OA_1,\ [OA_2,\ ....,[OA_{2010}$, distincte două câte două.

Notăm cu **U** mulţimea tuturor unghiurilor având ca laturi două semidrepte distincte dintre cele considerate.

a) Demonstraţi că în **U** există măcar un unghi de măsură cel puţin egală cu 10′ şi măcar un unghi de măsură cel mult egală cu 11′ ;

b) Determinaţi cardinalul minim posibil al mulţimii **U** şi cardinalul maxim posibil al mulţimii **U.**

Gabriel Popa, Iaşi

BAREM:

a) Considerăm cele 2010 unghiuri în jurul punctului O, formate de semidrepte consecutive.

Suma măsurilor acestora este de $360^\circ = 21600'$ (*).. **1p**

Dacă toate unghiurile ar avea măsura mai mică de 10′, atunci suma măsurilor lor ar fi mai mică de 2010 · 10′ = 20100′ (contradicție cu (*)); deci va exista măcar un unghi printre cele 2010 având măsura de cel puțin 10′.. **1p**

Dacă toate unghiurile ar avea măsura mai mare de 11′, atunci suma măsurilor lor ar fi mai mare de 2010 · 11′ = 22110′ (contradicție cu (*)) **1p**

b) Cele 2010 semidrepte formează $\dfrac{2010 \cdot 2009}{2} = 2019045$ perechi.. **1p**

Dacă o astfel de pereche nu este formată din semidrepte opuse, ea determină un unic unghi; în caz contrar, determină două unghiuri alungite **1p**

Cum cele 2010 semidrepte pot forma cel mult 1005 perechi de semidrepte opuse, deducem că U are **cardinalul minim 2019045** şi **cardinalul maxim 2020050** **2p**