CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ”NICOLAE PĂUN”
EDIȚIA A XVII-A - DECEMBRIE 2010

SUBIECTE CLASA A VIII -A

Problema 1.

Fie numerele reale pozitive a,b,c astfel încât $\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}=1.$

Demonstrați că $abc \geq 2.$

Marcel Teleucă, Chişinău

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

$\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}=1. \Leftrightarrow \frac{a^3}{1+a^3}=\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}$ .... **1 punct**

Aplicând inegalitatea mediilor, obținem:

$\frac{a^3}{1+a^3} \geq 2\sqrt{\frac{1}{(1+b^3)(1+c^3)}}$ .... **1 punct**

$\Leftrightarrow a^3 \geq 2\sqrt{\frac{(1+a^3)^2}{(1+b^3)(1+c^3)}}$ .... **1 punct**

Analog $b^3 \geq 2\sqrt{\frac{(1+b^3)^2}{(1+c^3)(1+a^3)}}$ **şi** $c^3 \geq 2\sqrt{\frac{(1+c^3)^2}{(1+a^3)(1+b^3)}}$ .... **1 punct**

Prin înmulțire , $\Rightarrow (abc)^3 \geq 8$ .... **1 punct**

$\Leftrightarrow (abc-2)[(abc)^2+2abc+4] \geq 0$ .... **1 punct**

Ținând cont de $(abc)^2+2abc+4>0, \Rightarrow abc \geq 2$ .... **1 punct**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ”NICOLAE PĂUN”
EDIȚIA A XVII-A - DECEMBRIE 2010

SUBIECTE CLASA A VIII -A

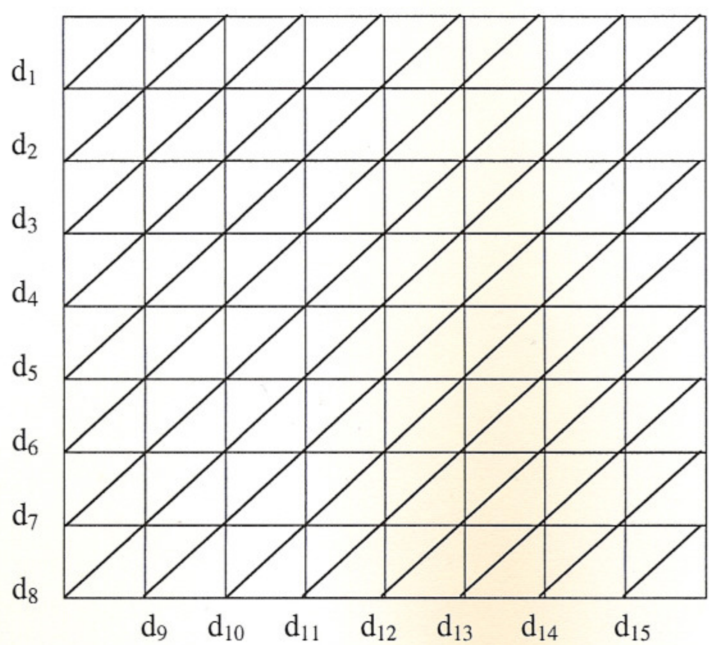
Problema 2

Se consideră o tablă de şah 8x8. Pe 33 dintre pătrățelele acesteia se aşează câte o piatră. Demonstrați că indiferent de modul de aşezare, există 5 pietre, astfel încât oricare două dintre acestea nu se află nici pe aceeaşi linie şi nici pe aceeaşi coloană a tablei de şah.

Marcel Teleucă, Chişinău

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Ducem paralele la diagonala principală **..............2 puncte**



Folosim principiul lui Dirichlet. Alegem căsuțele ducând paralele la o diagonală şi considerăm $c_1 = d_1+d_9$, $c_2 = d_2 + d_{10}$, $c_3 = d_3+d_{11}$, $c_4 = d_4+d_{12}$, $c_5 = d_5+d_{13}$, $c_6 = d_6+d_{14}$, $c_7 = d_7+d_{15}$, $c_8 = d_8$ (Fiecare căsuță are 8 pătrățele ale tablei.) **.................2 puncte**

Colorăm căsuțele cu 8 culori. **.................2 puncte**

Cum avem 33 de pietricele şi $33 = 4 \cdot 8 + 1$, vor exista 5 pietricele aflate în aceeaşi căsuță, colorată cu aceeaşi culoare şi în concluzie există 5 pietricele, dintre care oricare două nu se află nici pe aceeaşi linie şi nici pe aceeaşi coloană a tablei de şah. **.................1 punct**

Problema 3.

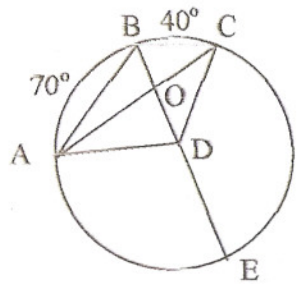
În patrulaterul convex ABCD se cunosc măsurile unghiurilor: $m(\angle BAC)=20^\circ$, $m(\angle BCA)=35^\circ$.

a) Dacă D este centrul cercului circumscris triunghiului ΔABC, aflaţi măsura unghiului format de diagonalele patrulaterului ABCD ;

b) Ştiind că $m(\angle BDC)=40^\circ$ şi $m(\angle BDA)=70^\circ$, arătaţi că D este centrul cercului circumscris triunghiului ΔABC.

Cornel Moroti, Rm. Vâlcea

BAREM:



a) $m(\angle BAC)=20^\circ \Rightarrow m(\widehat{BC})=40^\circ$

$m(\angle BCA)=35^\circ \Rightarrow m(\widehat{BA})=70^\circ$

Fie BE diametru $\Rightarrow m(\widehat{BE})=180^\circ \Rightarrow m(\widehat{AE})=110^\circ$

Unghiul $\angle AOE$ este unghi cu vârful în interiorul cercului $\Rightarrow$

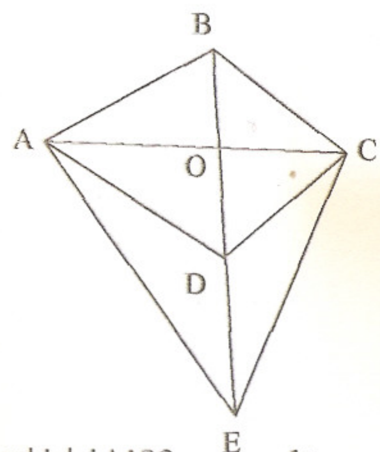
$m(\angle AOE)=\frac{m(\widehat{AE})+m(\widehat{BC})}{2}=\frac{110^\circ+40^\circ}{2}=75^\circ$ **2p**

b) Construim semidreapta (CE astfe încât $m(\angle DCE)=20^\circ$, ca în figura alăturată.

În ΔDCE avem $m(\angle DEC)=20^\circ=m(\angle DCE) \Rightarrow \Delta$DCE isoscel, cu DC = DE (1) **1p**

Patrulaterul ABCE este inscriptibil ($m(\angle BEC)=20^\circ=m(\angle BAC)$)$\Rightarrow$

$m(\angle BEA)=m(\angle BCA)=35^\circ$ **1p**



În ΔDAE avem $m(\angle DAE)=35^\circ=m(\angle DEA) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta$DAE isoscel, cu DA = DE (2)... **1p**

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ DC = DA (*) $\Rightarrow$ ΔDAC isoscel $\Rightarrow$

$m(\angle DAC)=m(\angle DCA)=35^\circ$ **1p**

În ΔDAB avem $m(\angle DBA)=55^\circ=m(\angle DAB) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta$DAB isoscel, cu DA = DB (**)

Din (*) și (**) $\Rightarrow$ DC = DA = DB $\Rightarrow$ D este centrul cercului circumscris triunghiului ΔABC **1p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ”NICOLAE PĂUN”
EDIȚIA A XVII-A - DECEMBRIE 2010

SUBIECTE CLASA A VIII –A

Problema 4

Fie cubul ABCDA’B’C’D’ cu AB = 12 cm.

a) Aflați distanța de la puncul A’ la planul (AB’D’) ;

b) Arătați că punctele A’, I şi C sunt coliniare, unde punctul I este centrul cercului înscris triunghiului $\Delta AB'D'$;

c) Fie F$\in$ (AA’), G$\in$(BB’) şi E$\in$(CC’) astfel încât BG = 3cm şi $\frac{A'F}{AA'} = \frac{C'E}{CC'} = \frac{1}{3}$.

Calculați perimetrul secțiunii determinate de planul (EFG) în cub.

Ştefan Smărăndoiu, Rm. Vâlcea

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) Fie A’C’ $\cap$ B’D’ = { O’ }

A’O’ $\perp$ B’D’

Fie A’H $\perp$ AO’. Arată că A’H $\perp$ (AB’D’) .... **1 punct**

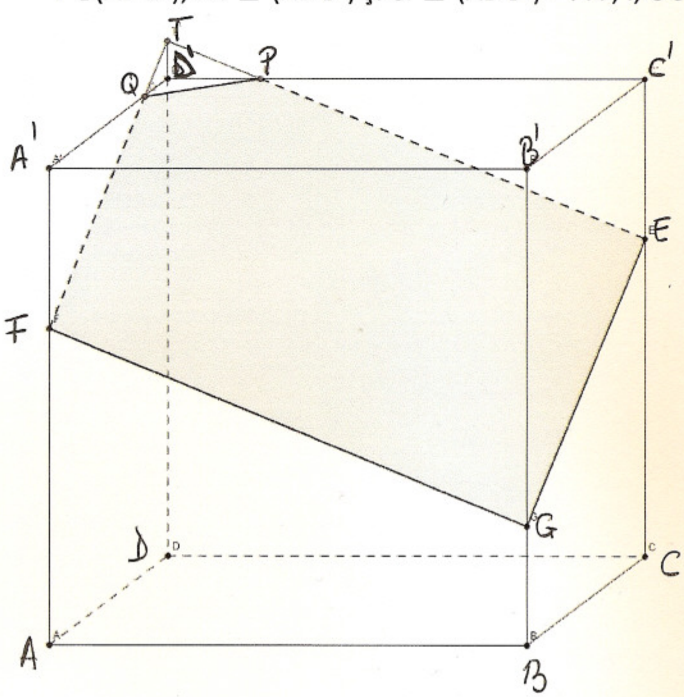
Calculează A’H $= 4\sqrt{3}cm$ .... **1 punct**

b) Evident I este şi centru cercului circumscris triunghiului AB’D’.

d(A’, D’) = d (A’, A) = d (A’, B’) =12 cm $\Rightarrow$ A’I $\perp$ (AB’D’) **............0,5 puncte**

d (C, A) = d (C, B’) = d(C, D’) = 12 $\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow$ CI $\perp$ (AB’D’) **............0,5 puncte**

I $\in$(AB’D’), A’I $\perp$ (AB’D’) şi CI $\perp$ (AB’D’) $\Rightarrow$A’, I, C coliniare **...............1 punct**



c)

Arată că secțiunea este pentagonul EPQFG **...............1 punct**

Calculează EG = FG = 13 cm **.......... 1 punct**

FQ = EP = $\frac{52}{5}$ cm şi PQ = $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ cm

Perimetrul secțiunii este $\frac{234+12\sqrt{2}}{5}$ cm **.........1 punct**