Concursul de matematică „NICOLAE COCULESCU“ 2010

EDIŢIA a VII-a SLATINA – 3 decembrie 2010

Clasa a III-a

1. a) O pendulă bate o singură dată la jumătăţi de oră, iar la ore fixe de câte ori indică numărul de pe cadran. De câte ori bate pendula de la ora 7 : 45 la ora 13 : 35 ?

b) Adunând 3 numere naturale distincte, diferite de 0, se obţine suma 10. Care sunt numerele pe care le-am adunat? Aflaţi toate posibilităţile.

2. Harry Potter îşi aşteaptă cei 7 prieteni în faţa Şcolii de Magie Hogwarts la o oră fixată dinainte. Ei stabilesc că cine întârzie dă fiecăruia dintre cei sosiţi înaintea lui câte o baghetă magică. Câţi prieteni au întârziat ştiind că ei vin pe rând şi s-au oferit 22 de baghete?

3. Într-un bloc sunt 30 de familii cu 60 copii. 2 familii au câte 5 copii, 3 familii au câte 4 copii, 5 familii au câte 3 copii, 7 familii au câte 2 copii, iar restul familiilor au câte un copil sau nu au copii. Aflaţi numărul de familii fără copii.

4. Pe masa magicianului sunt trei cutii: una roşie, una galbenă şi una albastră. În cutia roşie sunt 10 bile albe, iar în cutia galbenă sunt 15 bile negre.

Numărul de bile negre din cutia roşie este cu 3 mai mare decât numărul de bile negre din cutia galbenă şi cu 4 mai mic decât numărul de bile negre din cea albastră.

Bilele albe din cutia galbenă sunt cu 7 mai mult decât cele albe din cutia roşie şi cu 3 mai puţin decât bilele albe din cutia albastră.

Calculaţi numărul total de bile ale magicianului.

Clasa a IV-a

1. Se consideră suma $4 + 6 + 8 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 32 + 34 + 36$.

a) Calculaţi suma, eventual grupând convenabil termenii.

b) Dacă înlocuim două semne „$+$” cu semne „$-$” se obţine rezultatul 118. În faţa căror numere din sumă s-a pus semnul „$-$”?

2. Bunicul şi-a propus să-şi împrejmuiască cu 5 rânduri de sârmă o grădină de formă dreptunghiulară cu dimensiunile de 65 m şi 30 m. Cu câţi metri va trebui să micşoreze lungimea grădinii, pentru a-i ajunge sârma, dacă bunicul avea doar 850 m de sârmă?

3. Determinaţi numerele naturale de 5 cifre distincte, ştiind că diferenţa oricăror două cifre alăturate este 2.

4. O carte *ciudată* este o carte în care toate paginile sunt numerotate cu numere formate numai din cifre impare. Aflaţi ce număr se află pe a 50-a pagină a unei cărţi *ciudate*.

Clasa a V-a

1. Suma a 5 numere naturale diferite este 12. Determinaţi suma pătratelor numerelor.

Marius Perianu

2. Unsprezece numere naturale dau la împărţirea cu 20 resturi diferite. Suma tuturor resturilor obţinute este mai mare decât 113. Arătaţi că cel puţin unul dintre resturi este număr prim.

M.A. Fianu

3. Determinaţi numerele de forma $\overline{abcd}$, cu cifre nenule, care verifică relaţia

$$\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d + 1 = \overline{dcba}.$$

Costel Anghel

4. Fie $p \geq 3$ un număr prim şi $k \geq 1$ un număr natural. Determinaţi în câte moduri poate fi scris numărul p^k ca sumă de cel puţin două numere naturale consecutive.

Vasile Pop

Clasa a VI-a

1. Fie a şi b două numere naturale nenule astfel încât $a + 2^b = b + 2^a$. Arătaţi că $a = b$.

Florian Dumitrel

2. Determinaţi cel mai mare număr natural de patru cifre care împărţit la 3 dă restul 1, împărţit la 5 dă restul 2 şi împărţit la 7 dă restul 3.

Florian Dumitrel

3. Fie $n \in \mathbb{N}$. Determinaţi toate numerele naturale p pentru care

$$(n, n+6) + (n+1, n+7) + ... + (n+p, n+p+6) = 2010,$$

unde (x, y) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y.

Maria Pop

4. Fiecărui număr natural nenul n i se asociază un număr natural notat a_n, astfel încât să fie verificate simultan condiţiile:

a) $a_{mn} = a_m + a_n$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $a_n = 0$ pentru orice număr natural care are ultima cifră 9.

Dacă p este un număr natural prim cu 10, arătaţi că $a_p = 0$.

Marius Perianu

Clasa a VII-a

1. Arătaţi că 2010 nu se poate scrie ca suma pătratelor a cel puţin două numere prime, impare şi distincte.

Florian Dumitrel

2. Determinaţi cel mai mare număr natural n cu proprietatea că, scriind numerele 1, 2, ..., 2010 în orice ordine, există 15 termeni consecutivi cu suma cel puţin egală cu n.

Marius Perianu

3. Determinaţi soluţiile naturale ale ecuaţiei $3^x \cdot 5^y + 4 = 7^z$.

Mihai Bălună

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $[AB] \equiv [AC]$ şi $m(\widehat{BAC}) = 110^\circ$. În interiorul triunghiului se consideră punctul D astfel încât $m(\widehat{ABD}) = 5^\circ$ şi $m(\widehat{ACD}) = 10^\circ$. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{ADC}$.

Costel Anghel

Clasa a VIII-a

1. Determinaţi numerele reale x, y astfel încât $x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1$ şi $\sqrt{x+y} = x^2 - y$.

$(***)$

2. Se consideră şirul de fracţii

$$\frac{1}{1};\ \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{1};\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1};\ \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{2}, \frac{4}{1};\ \dots;\ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}, \frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-2}, \dots, \frac{n}{1}, \dots$$

Notăm cu a_n poziţia pe care apare a $n-a$ oară în şir numărul raţional $\dfrac{1}{2}$; spre exemplu $a_1 = 2$, $a_2 = 11$ etc. Determinaţi a_{2010}.

Marius Perianu

3. Fie ABC un triunghi şi $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului. Arătaţi că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă $\dfrac{1}{AA'} + \dfrac{1}{BB'} + \dfrac{1}{CC'} = \dfrac{1}{r}$, unde r este raza cercului înscris.

Florian Dumitrel

4. Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ pentru care $\text{cmmmc}\,[1, 2, ..., n-1] = \text{cmmmc}\,[1, 2, ..., n]$.

O.T.V.

Clasa a IX-a

1. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{1}{9}$. Demonstraţi că $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{b^2c^2} \geq \frac{730}{3}$.

Costel Anghel

2. Fie ABC un triunghi şi punctele $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, $M \in (BC)$, $N \in (PQ)$ astfel încât $\frac{PB}{QC} = \frac{MB}{MC} = \frac{NP}{NQ}$. Demonstraţi că dreapta MN coincide sau este paralelă cu bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

Florian Dumitrel

3. Determinaţi numerele naturale a_1, a_2, ..., a_n, ... care au proprietatea

$$a_n + a_{n+1} + 2010 = a_{n+2}a_{n+3}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mihai Băluna

4. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care $\left[n\sqrt{2}\right]$ este o putere a lui 2.

O.T.V.

Clasa a X-a

1. Determinaţi funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia

$$f(x) - f(y) = (x - y)(g(x) + g(y)), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Vasile Pop

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$, distincte două câte două, astfel încât $|a| = |b| = |c|$. Dacă $a^2 + \frac{bc}{a}$, $b^2 + \frac{ca}{b}$, $c^2 + \frac{ab}{c} \in \mathbb{R}^*$, arătaţi că $abc = 1$.

Dana Heuberger

3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, şi $a > 0$ astfel încât $2^a + \log_2 a = n^2$. Demonstraţi că $2\log_2 n - \frac{1}{n} < a < 2\log_2 n$.

G.R.

4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. O funcţie bijectivă $f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă relaţia

$$g(k) = f(1) + f(2) + ... + f(k) - n\left[\frac{f(1) + f(2) + ... + f(k)}{n}\right],$$

pentru orice $k = 1, 2, ..., n$ defineşte o funcţie bijectivă $g : \{1, 2, ..., n\} \to \{0, 1, ..., n-1\}$. Arătaţi că există o funcţie cu proprietatea $\mathcal{P}$ dacă şi numai dacă n este par.

Emil Vasile, Ploieşti

Clasa a XI-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\sigma, \tau \in S_n$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sigma(k)}{\tau(k)}$.

Eduard Buzdugan

2. Fie $\mathcal{A} = \left\{ X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid X \neq O_3 \text{ şi } \operatorname{Tr}(X^2) = \operatorname{Tr}(X^*) = 0 \right\}$.
a) Arătaţi că $\mathcal{A}$ este infinită.
b) Fie $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$, astfel încât $A^2 = AB$. Demonstraţi că $A^3 = B^3 = O_3$.

Flavian Georgescu

3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 \in (0,1)$ şi $a_{n+1} = a_n - \sin^2 a_n$, $n \geq 1$.
a) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n$.
b) Determinaţi toate numerele naturale p pentru care şirul $b_n = a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p$ este convergent.

Florian Dumitrel

4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere naturale nenule astfel încât $a_k \mid a_{k+1}$ şi $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \geq k+1$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{a_k}$$

este convergent şi limita sa este număr iraţional.

Florian Dumitrel

Clasa a XII-a

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $x, y \in G \setminus \{e\}$, unde e este elementul neutru al grupului. Dacă $x^7 = e$ şi $xy = y^2 x$, determinaţi ordinul elementului y în grupul G.

Dan Nedeianu

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu n elemente. Pentru fiecare $k \in \mathbb{Z}$ definim $G_k \overset{not}{=} \left\{ x^k \mid x \in G \right\}$.
Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$ şi $d = (a, b)$, arătaţi că $G_a G_b = G$ dacă şi numai dacă $(d, n) = 1$, unde $G_a G_b = \{u \cdot v \mid u \in G_a \text{ şi } v \in G_b\}$.

Dana Heuberger

3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)$ şi F o primitivă a sa.
a) Arătaţi că F este bijectivă.
b) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} xF\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Florian Dumitrel

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi periodică, de perioadă iraţională. Demonstraţi că şirul $\left(\int_0^1 f(x+n)\, dx \right)_{n\geq 1}$ este convergent dacă şi numai dacă f este constantă.

Florian Dumitrel