Clasa a IX-a

(Problema 1)

• A doua inegalitate se demonstrează prin inducție matematică după n.

•• Pentru a doua inegalitate obține (pentru $x \in [k, k+1)$)

$$|x-1| + |x-2| + \dots + |x-n| = x-1 + x-2 + \dots x-k + $$
$$+ k+1-x + \dots + n-x$$
$$= (2k-n)x + \frac{n(n+1)}{2} - k(k+1)$$
$$\geq 2k^2 - nk + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - k^2 - k$$
$$= k^2 - (n+1)k + \frac{n(n+1)}{2}.$$

••• Se arată în final că inegalitatea din enunț este adevărată deoarece

$$k^2 - (n+1)k + \frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{n^2-1}{4}$$ (echivalentă cu $a^2 \geq 0$).

Problema 2 Clasa a IX-a.

a) Avem $[x] = -x^2 + x + 2$

$x-1 < [x] \le x \Rightarrow \begin{cases} x^2 \ge 2 \\ x^2 < 3 \end{cases}$ deci

$x \in (-\sqrt{3}; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Cazul I: $x \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \Rightarrow [x] = -2$ cu soluția $x_1 = \frac{1-3\sqrt{2}}{2}$

Cazul II: $x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \Rightarrow [x] = 1$ cu soluția $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) Dacă $[\sqrt{n}] = 1$ este adevărat, deci $n = 2, 3$.

În general $n \neq k^2 \Rightarrow$ pt $k^2 < n < (k+1)^2$ avem $[\sqrt{n}] = k$.

Trebuie să avem $k^3 | n^2$ deci n este multiplu de k, dar între k^2 și $(k+1)^2$ sunt doi multipli de k: k^2+k, k^2+2k.

(i) $n = k^2+k \Rightarrow n^2 = k^2(k+1)^2$ de aici

$k^3 | n^2 \Leftrightarrow k^3 | k^2(k+1)^2 \Leftrightarrow k | k^2+2k+1 \Rightarrow k | 1$

deci $1 < n < 3$ caz analizat.

(ii) $n = k^2+2k \Rightarrow n^2 = k^2(k+2)^2 \Rightarrow k^3 | k^2(k+2)^2 \Rightarrow$

$k | k^2+4k+4$ deci $k | 4$.

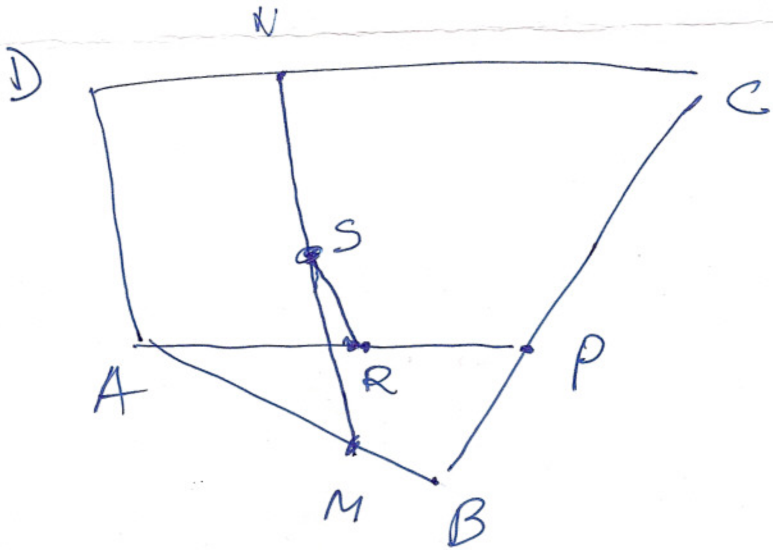
(1) $k = 2 \Rightarrow 2^2 < n < 3^2 \Rightarrow n \in \{5, 6, 7, 8\}$ deci $n = 8$

(2) $k = 4 \rightarrow 4^2 < n < 5^2 \rightarrow n \in \{17, \ldots, 24\}$ deci $n = 24$.

Soluții: $n \in \{2, 3, 8, 24\}$.

Clasa a IX-a

(Problema 3)



Problema 3

Fie $\overrightarrow{AB} = v_1$

$\overrightarrow{AD} = v_2$

$\overrightarrow{AC} = v_3$.

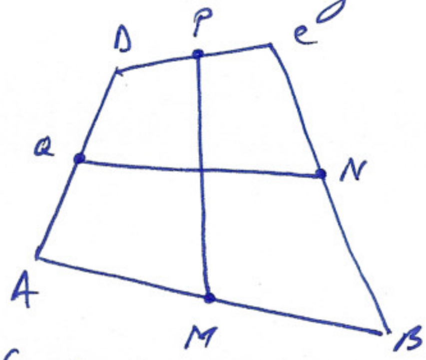
$\cancel{\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} v_1}$

- Se exprimă vectorii $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{AM}$ în funcție de v_1, v_2 și v_3.
- Obține $RS = AS - AR = \frac{1}{3} v_2$. De aici concluzia se deduce cu ușurință.

Clasa a IX-a. Problema 4.

Folosim următoarea proprietate:

(*) $(\forall)\ \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ are loc $|\vec{u}|+|\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|$ cu egalitate $\Longleftrightarrow$ $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari.



Alegem originea în A.

$E = |\vec{MP}| + |\vec{NQ}| =$

$= |\vec{AP} - \vec{AM}| + |\vec{AQ} - \vec{AN}| =$

$= \left| \dfrac{\vec{AC}+\vec{AD}}{2} - \dfrac{\vec{AB}}{2} \right| + \left| \dfrac{\vec{AD}}{2} - \dfrac{\vec{AB}+\vec{AC}}{2} \right| = \dfrac{1}{2}\left(|\vec{AC}+\vec{AD}-\vec{AB}| + |\vec{AD}-\vec{AB}-\vec{AC}|\right)$

$F = \dfrac{1}{2}\left(|\vec{AB}| + |\vec{BC}| + |\vec{CD}| + |\vec{DA}|\right) = \dfrac{1}{2}\left(|\vec{AB}| + |\vec{AC}-\vec{AB}| + |\vec{AD}-\vec{AC}| + |\vec{AD}|\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left[\left(|\vec{AB}| + |\vec{AC}-\vec{AD}|\right) + \left(|\vec{AD}| + |\vec{AC}-\vec{AD}|\right)\right] \overset{(*)}{\geq}$

$\dfrac{1}{2}\left[\left(|\vec{AB}+\vec{AC}-\vec{AD}|\right) + \left(|\vec{AC}+\vec{AD}-\vec{AB}|\right)\right] = E \Longleftrightarrow F \geq E$

dar din ipoteză $F = E$, deci

$\vec{AC} - \vec{AB}$ este coliniar cu $\vec{AD}$, i.e $(\exists)\ \lambda \in \mathbb{R}$ a.i. $\vec{CB} = \lambda \vec{AD} \Rightarrow BC \parallel AD$

$\vec{AC} - \vec{AD}$ este coliniar cu $\vec{AB}$, i.e. $(\exists)\ \mu \in \mathbb{R}$ a.i. $\vec{CD} = \mu \vec{AB} \Rightarrow CD \parallel AB$

de unde concluzia.