CLASA A X-A

Determinati $n \in \mathbf{N}$ si multimea $B \subseteq \mathbf{R}$ stiind ca exista o functie bijectiva $f : \{1, 2, ..., n\} \to B$ cu proprietatea ca

$$\sqrt{5 - 3^{f(k)}} = 5 - 9^{f(k)},$$

oricare ar fi $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Cristinel Mortici

Solutie. Se pune problema rezolvarii ecuatiei

$$\sqrt{5 - y} = 5 - y^2.$$

Cu $5 = m$, avem

$$\begin{aligned} \sqrt{m - y} &= m - y^2 \Rightarrow \\ m - y &= m^2 + y^4 - 2my^2 \Rightarrow \\ m^2 - \left(2y^2 + 1\right) m + y^4 + y &= 0, \end{aligned}$$

deci

$$m_{12} = \frac{\left(2y^2 + 1\right) \pm (2y - 1)}{2}.$$

Cazul $y^2 + y = m$, deci $y^2 + y = 5$. Obtinem

$$y_1 = \frac{\sqrt{21} - 1}{2}, \quad y_2 = \frac{-\sqrt{21} - 1}{2}$$

Cazul $y^2 - y + 1 = m$, deci $y^2 - y + 1 = 5$. Obtinem

$$y_3 = \frac{\sqrt{17} + 1}{2}, \quad y_4 = \frac{-\sqrt{21} + 1}{2}.$$

In ecuatia functionala data, $y = 3^{f(k)} > 0$, deci dintre $y_1, ..., y_4$ pastram y_1 si y_3,

$$3^{f(k)} \in \left\{ \frac{\sqrt{21} - 1}{2}, \frac{\sqrt{17} + 1}{2} \right\} \Rightarrow f(k) \in \left\{ \log_3 \frac{\sqrt{21} - 1}{2},\ \log_3 \frac{\sqrt{17} + 1}{2} \right\}.$$

Raspuns:

(I). $n = 1$, $B = \left\{ \log_3 \frac{\sqrt{21}-1}{2} \right\}$ sau $B = \left\{ \log_3 \frac{\sqrt{17}+1}{2} \right\}$

(II) $n = 2$ si $B = \left\{ \log_3 \frac{\sqrt{21}-1}{2},\ \log_3 \frac{\sqrt{17}+1}{2} \right\}$.

Clasa a X-a

Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ cu proprietăţile:

$$f(x) \geq 2^x,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

şi

$$f(x+y) \geq f(x) \cdot f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Vasile Pop

Soluţie. Avem $f(0) \geq 1$ şi apoi $f(x+0) \geq f(x) \cdot f(0) \geq f(x)$, deci

$$f(x) = f(x) \cdot f(0),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $f(0) \neq 1$ atunci $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, care nu verifică (1). Deci $f(0) = 1$.

Avem:

$$1 = f(0) = f(x-x) \geq f(x) \cdot f(-x) \overset{(1)}{\geq} f(x) \cdot 2^{-x},$$

deci $f(x) \leq 2^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ şi cuplat cu (1) rezultă $f(x) = 2^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, este unica funcţie cu proprietăţile cerute.

Clasa a X-a

1. Presupunem că f este surjectivă și arătăm că $a \neq b$.
Prin absurd dacă $a = b$ atunci $f(x) = 0$ deci nu poate fi surjectivă.

2. Dacă $a \neq b$ arătăm că f este surjectivă.

$$f(x) = \left[\frac{\lg x}{\lg a}\right] - \left[\frac{\lg x}{\lg b}\right].$$

Finalizarea revine la a demonstra că funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ $g(y) = [ry] - [sy]$ cu $r \neq s$, este surjectivă.

Pentru aceasta, observăm că pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ există $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $ry = sy + n$.

Clasa a X-a (Problema 4).

- Considerăm $A(v)$, $B(w)$ și $C(z)$.
- Din condiția $z = av + bw$ cu $a, b > 0$ și $a+b=1$ obținem că $C \in (AB)$.
- A doua condiție din enunț poate fi scrisă sub forma

$$\frac{|z-v|}{|z-w|} = \frac{|v|}{|w|} \overset{\text{not}}{=} k > 0. \quad (1)$$

- Observăm că $z = \frac{1}{k+1}v + \frac{k}{k+1}w$, de unde obținem

$$|z| \leq \frac{1}{k+1}|v| + \frac{k}{k+1}|w| \quad (2)$$

Înlocuim în (2) pe k cu $\frac{|v|}{|w|}$ și obținem inegalitatea din enunț.

Generalizarea constă în înlocuirea celei de a doua ipoteze cu condiția $\frac{|z-w|}{|z-v|} = k > 0$.