Clasa a XI-a. Problema 1.

1° Luăm $P_n(x,y)=\left(x^{a_n}\cdot y^{b_n},\ x^{c_n}\cdot y^{d_n}\right)$ și din

$P_{n+1}=P\circ P_n$ găsim $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n\end{pmatrix}$

sau $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3\end{pmatrix}^n$

2° Prin calcul obținem $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \frac{2+4^n}{3} & \frac{-1+4^n}{3} \\ \frac{-2+2\cdot 4^n}{3} & \frac{1+2\cdot 4^n}{3}\end{pmatrix}$

3° $P_n(x,x)=\left(x^{a_n+b_n},\ x^{c_n+d_n}\right)$ deci

$$f_n=\frac{1+2\cdot 4^n}{3};\quad g_n=\frac{-1+4\cdot 4^n}{3}$$

4° $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot f_n}{g_n}\right)^{4^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4^{n+1}+2}{4^{n+1}-1}\right)^{4^n}=e^{3/4}$

CLASA A XI A

Fie M multimea tuturor matricilor de tip 3x5 cu toate elementele facand parte din $\{+1,-1\}$ si cu produsul elementelor pe fiecare linie si pe fiacre coloana egal cu - 1.

a) Sa se determine card M
b) Sa se determine valoarea maxima atinsa de minorii de ordin 3 formati cu elementele matricilor din M.

Solutie

Lazăr, Iași

a) Daca alegem un minor de tip 2x4 dintr-o matrice din M , se arata ca el determina in mod unic linia si coloana ramase .Deci putem pune in minorul de tip 2x4 orice elemente +1 sau -1 fara a mai tine cont de restrictia produsului egal cu -1.

Asadar vom avea $2^{2x4} = 2^8$ matrici (numarul de functii definite pe o multime cu 8 elemente si codomeniul format din +1 si -1)...........3p

b) Avem doar 3 linii deci pe coloane se va respecta regula cu produsul egal cu -1. Valoarea determinantului este para deoarece adunam 6 numere impare.......1p Maximul teoretic este 6 dar el nu poate fi atins deoarece ar trebui sa avem primii 3 termeni din formula triunghiului egali cu +1 si urmatorii 3 sa fie egali cu -1 adica produsul tuturor termenilor din matricea care da minorul respective este in acelasi timp +1 si -1
....2p

Un minor cu valoarea 4 are pe diagonala principala egale cu -1 si restul egali cu +1.Deci maximul este 4.....................................1p

CLASA a XI-a

(Problema 3)

a). Se aplică Lema lui Stoltz-Cesaro și obținem limita egală cu $\frac{1}{2}$.

b) Prin reducere la absurd. Admitem că pentru orice n natural există $k_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_{k_n} \le k_n$.

Atunci

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \dots + \frac{\ln a_{k_n}}{a_{k_n}} \le \frac{\ln 2}{2} + \dots + \frac{\ln k_n}{k_n}$$

$$\le (\ln k_n)^2 \le k_n^2 \text{ pentru}$$

$n \ge n_0$. Am utilizat rezultatul de la a). Am ~~fost~~ ajuns la contradicție.

c). De la b) se obține că $a_n \to \infty$ deci $\frac{\ln a_n}{a_n} \to 0$.

Pe de altă parte din definiția lui a_n obținem:

$$0 \le x_n := \frac{\ln 2}{2} + \dots + \frac{\ln a_n}{a_n} - n^2 \le \frac{\ln a_n}{a_n}$$

Prin trecere la limită obținem $x_n \to 0$. Atunci

$$\frac{x_n}{(\ln a_n)^2} = \frac{\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \dots + \frac{\ln a_n}{a_n}}{(\ln a_n)^2} - \frac{n^2}{(\ln a_n)^2} \to 0 \ (n \to \infty).$$

De aici $\left(\frac{\ln a_n}{n}\right)^2 \to 2$ deci $\frac{\ln a_n}{n} \to \sqrt{2}$.

Clasa a XI-a

(Problema 4)

· $col_1(A^n) = A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

·· pentru $n = 0, 1, 2$, obține sistemul de matrici coloană.

$$\begin{cases} C + D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 \\ x(B + C + D) = Ae_1 \\ x^2(2B + C) + yD = A^2 e_1 \end{cases}$$

Obținem soluțiile:

$$B = \frac{1}{x(y-x)}(A - xI)(A - yI) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{-1}{(y-x)^2}(A - (2x-y)I)(A - yI)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{(y-x)^2}(A - yI)^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Formula din enunț scrisă sub forma

$$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x^n(nB + C) + y^n D,$$ cu B, C, D date

mai sus, se obține prin inducție matematică după n folosind teorema lui Hamilton Cayley, adică

$$(A - xI)^2(A - yI) = O_3.$$