Problema 1 *Se consideră grupul $(G, \cdot)$ cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Spunem că subgrupul H al lui G are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă $H \neq G$ şi*

$$\forall x, y \in G \backslash H \Rightarrow xy \in H.$$

(a) *Să se dea un exemplu de grup G care are trei subgrupuri distincte, H, K, L cu proprietatea $\mathcal{P}$, astfel încât $G = H \cup K \cup L$.*

(b) *Dacă H, K, L sunt subgrupuri distincte cu proprietatea $\mathcal{P}$ ale lui G şi $G = H \cup K \cup L$, să se determine $|H \cap K \cap L|$.*

Dana Heuberger

Soluţie. **(a)** Grupul lui Klein şi grupul cuaternionilor verifică ipotezele problemei.

(b) Dacă H are proprietatea $\mathcal{P}$ şi $G \backslash H = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$, atunci avem elementele distincte $x_1^2, x_1x_2, \ldots, x_1x_t \in H$, deci $|G \backslash H| \leq |H|$. Aşadar $|H| \geq \frac{n}{2}$ şi cum $H \neq G$, din teorema lui Lagrange rezultă că n este par şi $|H| = \frac{n}{2}$.

Dacă H şi K au proprietatea $\mathcal{P}$, atunci $|H| = |K| = \frac{n}{2}$. Deoarece $H \neq K$ şi au acelaşi număr de elemente, obţinem că $|H \backslash K| = |K \backslash H|$. Cu acelaşi raţionament ca şi mai înainte, cum $\forall x, y \in H \backslash K \Rightarrow xy \in H \cap K$, deducem că $|H \backslash K| \leq |H \cap K|$, deci $|H \cap K| \geq \frac{|H|}{2} = \frac{n}{4}$. Dar $H \cap K$ e un subgrup al lui H, $H \cap K \neq H$ şi din teorema lui Lagrange rezultă $|H \cap K| \leq \frac{n}{4}$, aşadar $|H \cap K| = \frac{n}{4}$, deci $n = 4m$, cu $m \in \mathbb{N}^*$.

Dacă subgrupurile H, K, L au proprietatea $\mathcal{P}$, atunci $|H| = |K| = |L| = 2m$, $|H \cap K| = |H \cap L| = |K \cap L| = m$, deci

$|H \cap K \cap L| = |G| - |H| - |K| - |L| + |H \cap K| + |H \cap L| + |K \cap L| = m$. ∎

Clasa a XII-a Problema 2.

Cu schimbarea de variabilă $x=2t$ integrala se scrie $\int \frac{t^2+2}{(t\sin t+2\cos t)(t\cos t-2\sin t)}dt$

și folosind de descompunerea în fracții simple obținem

$$\int \frac{t^2+2}{(t\sin t+2\cos t)(t\cos t-2\sin t)}dt = \ln\left|\frac{t\sin t+2\cos t}{t\cos t-2\sin t}\right|+\mathcal{C}$$

Deci $$I=\int \frac{x^2+8}{(x^2-16)\sin x+8x\cos x}dx = \ln\left|\frac{x\sin 2x+\cos 2x}{x\cos 2x-\sin 2x}\right|+\mathcal{C}.$$

Clasa a XII-a. Problema 3.

Transport de structură.

a) De exemplu: $\operatorname{Din}(G,\cdot)$ grup, pt.

b) Fie $B = A_1 + A_2 + \dots + A_p$. $f(A_j) = A \cdot A_j$

$(\forall)\ j \in \{1, 2, \dots, p\}$ fiecare aplicația $f: G \to G$, $BA_j = B$ și cum aceasta este

este bijectivă. Urmează

adevărată pentru $j = 1, 2, \dots, p$ avem

$B^2 = B(A_1 + A_2 + \dots + A_p) = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_p = pB.$

Matricea $C^2 = \frac{1}{p^2} B^2 = \frac{1}{p^2} (pB) = C$ unde $C = \frac{1}{p} B$ este

idempotentă, deci $Tr(C) = \operatorname{rang}(C)$ și de aici

$Tr(B) = p \operatorname{rang}(C)$ este un multiplu de p.

clasa a XII-a

(Problema 9)

a) Fie $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Presupunem că f nu este mărginită pe $[a,b]$. Atunci există un şir (x_n), cu $x_n\in[a,b]$ şi $|f(x_n)|\to\infty$. Trecând eventual la un subşir putem presupune că $x_n\to c\in[a,b]$. Este clar că una dintre mulţimile $A=\{n\in\mathbb{N} : x_n\le c\}$ şi $B=\{n\in\mathbb{N} : x_n\ge c\}$ este infinită. Prin urmare există $y_n\le c$ cu $y_n\to c$. Dar $|f(y_n)|\to\infty$ şi $f(y_n)\to \underbrace{f(c-0)}_{\in\mathbb{R}}$ sunt contradictorii.

b) $$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0+0)\right| = \left|\int_{x_0}^{x}[f(t)-f(x_0+0)]\,dt\right|\cdot\frac{1}{(x-x_0)};\quad x>x_0$$

$<\varepsilon$ dacă $|x-x_0|<\delta$ (δ din definiţia existenţei limitei).

Drept consecinţă, F este derivabilă la dreapta în x_0 şi $F'_d(x_0)=f(x_0+0)$.