**Problema 1** *Se consideră grupul* $(G, \cdot)$ *cu* $n$ *elemente, unde* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. *Spunem că subgrupul* $H$ *al lui* $G$ *are proprietatea* $\mathcal{P}$ *dacă* $H \neq G$ *şi*

$$\forall x, y \in G \backslash H \Rightarrow xy \in H.$$

**(a)** *Să se dea un exemplu de grup* $G$ *care are trei subgrupuri distincte,* $H, K, L$ *cu proprietatea* $\mathcal{P}$, *astfel încât* $G = H \cup K \cup L$.

**(b)** *Dacă* $H, K, L$ *sunt subgrupuri distincte cu proprietatea* $\mathcal{P}$ *ale lui* $G$ *şi* $G = H \cup K \cup L$, *să se determine* $|H \cap K \cap L|$.

*Dana Heuberger*

---

**Soluţie. (a)** Grupul lui Klein şi grupul cuaternionilor verifică ipotezele problemei.

**(b)** Dacă $H$ are proprietatea $\mathcal{P}$ şi $G \backslash H = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$, atunci avem elementele distincte $x_1^2, x_1x_2, \ldots, x_1x_t \in H$, deci $|G \backslash H| \leq |H|$. Aşadar $|H| \geq \frac{n}{2}$ şi cum $H \neq G$, din teorema lui Lagrange rezultă că $n$ este par şi $|H| = \frac{n}{2}$.

Dacă $H$ şi $K$ au proprietatea $\mathcal{P}$, atunci $|H| = |K| = \frac{n}{2}$. Deoarece $H \neq K$ şi au acelaşi număr de elemente, obţinem că $|H \backslash K| = |K \backslash H|$. Cu acelaşi raţionament ca şi mai înainte, cum $\forall x, y \in H \backslash K \Rightarrow xy \in H \cap K$, deducem că $|H \backslash K| \leq |H \cap K|$, deci $|H \cap K| \geq \frac{|H|}{2} = \frac{n}{4}$. Dar $H \cap K$ e un subgrup al lui $H$, $H \cap K \neq H$ şi din teorema lui Lagrange rezultă $|H \cap K| \leq \frac{n}{4}$, aşadar $|H \cap K| = \frac{n}{4}$, deci $n = 4m$, cu $m \in \mathbb{N}^*$.

Dacă subgrupurile $H, K, L$ au proprietatea $\mathcal{P}$, atunci $|H| = |K| = |L| = 2m$, $|H \cap K| = |H \cap L| = |K \cap L| = m$, deci

$|H \cap K \cap L| = |G| - |H| - |K| - |L| + |H \cap K| + |H \cap L| + |K \cap L| = m$. ■

Clasa a XII-a Problema 2.

Cu schimbarea de variabilă $x=2t$ integrala se scrie $\displaystyle\int \frac{t^2+2}{(t\sin t+2\cos t)(t\cos t-2\sin t)}\,dt$

și folosind de descompunerea în fracții simple obținem

$$\int \frac{t^2+2}{(t\sin t+2\cos t)(t\cos t-2\sin t)}\,dt = \ln\left|\frac{t\sin t+2\cos t}{t\cos t-2\sin t}\right|+\mathcal{C}$$

Deci $\displaystyle I=\int \frac{x^2+8}{(x^2-16)\sin x+8x\cos x}\,dx = \ln\left|\frac{x\sin 2x+\cos 2x}{x\cos 2x-\sin 2x}\right|+\mathcal{C}.$

Clasa a XII-a. Problema 3.

a) De exemplu: transport de structură.

b) Fie $B = A_1 + A_2 + \dots + A_p$. Din $(G, \cdot)$ grup, pt. $(\forall)$ $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ fixat aplicatia $f : G \to G$, $f(A_j) = A \cdot A_j$ este bijectivă. Urmează $BA_j = B$ și cum aceasta este adevărată pentru $j = 1, 2, \dots, p$ avem

$B^2 = B(A_1 + A_2 + \dots + A_p) = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_p = pB$.

Matricea $C^2 = \frac{1}{p^2} B^2 = \frac{1}{p^2} (pB) = C$ unde $C = \frac{1}{p} B$ este idempotentă, deci $Tr(C) = rang(C)$ și de aici $Tr(B) = p\, rang(C)$ este un multiplu de p.

## Clasa a XII-a

(Problema 9)

a) Fie $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Presupunem că $f$ nu este mărginită pe $[a,b]$. Atunci există un șir $(x_n)$, cu $x_n \in [a,b]$ și $|f(x_n)| \to \infty$. Trecând eventual la un subșir putem presupune că $x_n \to c \in [a,b]$. Este clar că una dintre mulțimile $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq c\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geq c\}$ este infinită. Prin urmare există $y_n \leq c$ cu $y_n \to c$. Dar $|f(y_n)| \to \infty$ și $f(y_n) \to \underbrace{f(c-0)}_{\in \mathbb{R}}$ sunt contradictorii.

b) $$\left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0+0) \right| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(t)-f(x_0+0)]\,dt \right| \cdot \frac{1}{(x-x_0)};\ x > x_0$$

$< \varepsilon$ dacă $|x-x_0| < \delta$ ($\delta$ din definiția existenței limitei).

Drept consecință, $F$ este derivabilă la dreapta în $x_0$ și $F'_d(x_0) = f(x_0+0)$.