



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "NICOLE PAUN"  
EDIȚIA A XVII-A DECEMBRIE 2010

SUBIECTE CLASA A X-A

**Problema 1.** Determinați  $n \in \mathbb{N}$  și mulțimea  $B \subseteq \mathbb{R}$  știind că există o funcție bijectivă

$f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow B$  cu proprietatea ca  $\sqrt{5 - 3^{f(k)}} = 5 - 9^{f(k)}$ , oricare ar fi  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

*Cristinel Mortici*

**Problema 2.** Să se determine funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  cu proprietățile:  
 $f(x) \geq 2^x$  pentru  $x \in \mathbb{R}$  și

$$f(x+y) \geq f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

*Vasile Pop*

**Problema 3.** Fie  $a, b$  numere reale mai mari ca 1. Arătați că  $a \neq b$  dacă și numai dacă funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = [\log_a x] - [\log_b x]$  este surjectivă.

*Constantin Dragan*

**Problema 4.** Fie  $z, v, w$  trei numere complexe ( $v$  și  $w$  nenule). Presupunem că există  $a$  și  $b$  strict pozitive cu  $a+b=1$ , astfel încât  $z=av+bw$  și că  $|zv - vw| = |zw - vw|$ . Arătați că

$$|z| \leq \frac{2|vw|}{|v| + |w|}.$$

Formulați o generalizare a acestei probleme.

*Constantin Bușe*

**Nota:** Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotate cu 7 puncte.  
Timp de lucru 3 ore.