CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "NICOLE PAUN"
EDIȚIA A XVII-A DECEMBRIE 2010

SUBIECTE CLASA A XI-A

Problema 1. Fie P: $R^2 \to R^2$ data de P(x,y)=(x^2y, x^2y^3). Notam $P_{n+1}= P \circ P_n$ și $P_n(x,x)=(x^{f(n)}, x^{g(n)})$.

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2f(n)}{g(n)}\right]^{4^n}$.

Vasile Gorgotă

Problema 2. Fie M multimea tuturor matricilor cu 3 linii și 5 coloane, ale căror elemente sunt 1 sau -1 și pentru care produsul elementelor pe fiecare linie și pe fiecare coloană este egal cu -1.

a) Găsiți numărul de elemente al mulțimii M.
b) Determinați valoarea maximă a minorilor de ordinul 3 formați cu elementele matricilor din M.

Lazăr, Iași

Problema 3. a) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{\ln 3}{3}+\dfrac{\ln 4}{4}+.....+\dfrac{\ln n}{n}}{(\ln n)^2}$.

b) Fie a_n cel mai mic număr natural pentru care:

$$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+.....+\frac{\ln a_n}{a_n} > n^2.$$

Arătați că există un numar natural N, astfel încât $a_n \geq n$ pentru orice $n \geq N$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_n}{n}$.

Vasile Pop

Problema 4. Fie A o matrice de odinul 3 cu elemente numere complexe, al cărui polinom caracteristic este $p(\lambda)=(\lambda-x)^2(\lambda-y)$, unde $x \neq 0$ și $x \neq y$.
Arătați că există matricele coloană B, C și D astfel încât egalitatea

$$col_1(A^n) = x^n(nB+C)+y^nD$$

să aibă loc pentru orice n număr natural.

Constantin Bușe

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotat cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.