CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ”NICOLAE PAUN”
EDIȚIA A XVII-A DECEMBRIE 2010

SUBIECTE CLASA A XII-A

Problema 1. Se consideră grupul $(G,\cdot)$ cu n elemente, unde $n \in N$, $n \geq 4$.
Spunem că subgrupul H al lui G are proprietatea P dacă $H \neq G$ şi pentru orice $x, y \in G \setminus H$ avem că $xy \in H$.

a) Să se dea un exemplu de grup G, care are trei subgrupuri distincte, H, K, L cu proprietatea P, astfel încât $G = H \cup K \cup L$.

b) Dacă H, K, L sunt subgrupuri distincte cu proprietatea P ale lui G şi $G = H \cup K \cup L$, să se determine $|H \cap K \cap L|$.

Dana Heuberger

Problema 2. Să se calculeze:

$$I = \int \frac{x^2 + 8}{(x^2 - 16)\sin x + 8x\cos x} dx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Virgil Nicula, Vasile Gorgotă

Problema 3. a) Construiți un grup multiplicativ G= $\{ A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots A_p \}$ unde $A_i \in M_n(R)$.

b) Arătați că pentru orice astfel de grup avem Tr $(A_1 + A_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_p)$ este un întreg divizibil prin p, unde cu Tr(A) s-a notat suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A.

Mihai Piticari

Problema 4. Fie $f : R \to R$ o funcție ce are limite laterale finite, în orice punct din R.

a) Să se arate că f este mărginită pe orice interval real [a,b].

b) Presupunând că f este integrabilă Riemann pe orice interval real [a,b], arătați că funcția $x \to$ F(x)= $\int_0^x f(t)dt$ are derivate laterale finite în orice punct din R.

Sorin Rădulescu, Mihai Piticari

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotat cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.