

Concursul “Stelele matematicii” 2010

★★★ Sâmbătă, 11 Decembrie 2010, orele 10:00
★★★ Liceul Internațional de Informatică București

Problema 1. Fie $D := \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$. Arătați că există o submulțime $S \subset D$ de cardinalitate $|S| \geq \left\lfloor \frac{3}{5}n(n+1) \right\rfloor$, astfel încât pentru orice $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ să avem $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \notin S$.¹

Problema 2. Fie un pătrat $ABCD$, și punctele $M \in [BC]$, $N \in [CD]$, $P \in [DA]$, astfel încât

$$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = x, \quad \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}) = 2x, \quad \angle(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{NP}) = 3x.$$

i) Arătați că, pentru orice $x \in [0, \pi/8]$, o unică astfel de configurație există, iar P poate ocupa orice poziție pe segmentul $[DA]$;

ii) Determinați numărul unghiurilor $x \in [0, \pi/8]$ pentru care

$$\angle(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{PB}) = 4x.$$

Problema 3. Determinați cea mai mare constantă reală $K \geq 0$ astfel încât pentru orice $0 \leq k \leq K$, și pentru orice numere reale $a, b, c \geq 0$, satisfăcând $a^2 + b^2 + c^2 + kabc = k + 3$, să avem $a + b + c \leq 3$.

Problema 4. Fie a, b, c trei numere întregi strict pozitive. Demonstrați că există un întreg strict pozitiv N astfel încât

$$\begin{aligned} a &| Nbc + b + c \\ b &| Nca + c + a \\ c &| Nab + a + b \end{aligned}$$

dacă și numai dacă, notând $d = \text{cmmdc}(a, b, c)$ și $a = dx$, $b = dy$, $c = dz$, numerele x, y, z sunt mutual co-prime și, în plus, $\text{cmmdc}(d, xyz) | x + y + z$.

Orice cerere de clarificare poate fi făcută oricând pe parcursul probei. Este permisă folosirea calculatoarelor de buzunar. Timp de lucru $4\frac{1}{2}$ ore.

Problemele nu sunt prezentate în mod necesar în ordinea dificultății - niciuna nu este trivială. Concizia și claritatea redactării vor fi luate în considerație. Încercați să nu folosiți mai mult de o coală de hârtie pentru fiecare problemă. Ciornele nu se remit. Fiecare problemă valorează **10** puncte.

★★★ **Mult SUCCES tuturor participanților!**

¹Pentru cei care se plictisesc (!?!), căutați o cât mai mică valoare $3/5 \leq c < 1$ pentru care $|S| \leq c(n+1)^2$ pentru valori mari ale lui n , unde S are proprietatea din enunț.