Concursul "Stelele matematicii" 2010

★ ★ ★ Sâmbătă, 11 Decembrie 2010, orele 10:00
★ ★ ★ Liceul Internaţional de Informatică Bucureşti

Problema 1. Fie $D := \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$. Arătaţi că există o submulţime $S \subset D$ de cardinalitate $|S| \geq \left\lfloor \frac{3}{5} n(n+1) \right\rfloor$, astfel încât pentru orice $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ să avem $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \notin S$. [1]

Problema 2. Fie un pătrat $ABCD$, şi punctele $M \in [BC]$, $N \in [CD]$, $P \in [DA]$, astfel încât

$$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = x, \quad \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}) = 2x, \quad \angle(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{NP}) = 3x.$$

i) Arătaţi că, pentru orice $x \in [0, \pi/8]$, o unică astfel de configuraţie există, iar P poate ocupa orice poziţie pe segmentul $[DA]$;
ii) Determinaţi numărul unghiurilor $x \in [0, \pi/8]$ pentru care

$$\angle(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{PB}) = 4x.$$

Problema 3. Determinaţi cea mai mare constantă reală $K \geq 0$ astfel încât pentru orice $0 \leq k \leq K$, şi pentru orice numere reale $a, b, c \geq 0$, satisfăcând $a^2 + b^2 + c^2 + kabc = k + 3$, să avem $a + b + c \leq 3$.

Problema 4. Fie a, b, c trei numere întregi strict pozitive. Demonstraţi că există un întreg strict pozitiv N astfel încât

$$a \mid Nbc + b + c$$
$$b \mid Nca + c + a$$
$$c \mid Nab + a + b$$

dacă şi numai dacă, notând $d = \text{cmmdc}(a, b, c)$ şi $a = dx$, $b = dy$, $c = dz$, numerele x, y, z sunt mutual co-prime şi, în plus, $\text{cmmdc}(d, xyz) \mid x + y + z$.

Orice cerere de clarificare poate fi făcută oricând pe parcursul probei. Este permisă folosirea calculatoarelor de buzunar. Timp de lucru $\mathbf{4\frac{1}{2}}$ ore.

Problemele nu sunt prezentate în mod necesar în ordinea dificultăţii - niciuna nu este trivială. Concizia şi claritatea redactării vor fi luate în consideraţie. Încercaţi să nu folosiţi mai mult de o coală de hârtie pentru fiecare problemă. Ciornele nu se remit. Fiecare problemă valorează **10** puncte.

★ ★ ★ Mult SUCCES tuturor participanţilor!

[1] Pentru cei care se plictisesc (!?!), căutaţi o cât mai mică valoare $3/5 \leq c < 1$ pentru care $|S| \leq c(n+1)^2$ pentru valori mari ale lui n, unde S are proprietatea din enunţ.