OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA JUDEȚEANĂ

9 aprilie 2011

CLASA a V-a

BAREM DE CORECTARE

(20p) 1. Determinați numărul natural *n* pentru care:

$$\left(n\cdot n^5\cdot n^{5^2}\cdot\ldots\ldots\cdot n^{5^{2010}}\right)^4=5^{5^{2011}}:\left(1^5+5^0+1^{5^{2011}}+5^{0^{2011}}+2011^{0^5}\right).$$

Rezolvare:

Scrie: $n\cdot n^5\cdot n^{5^2}\cdot\ldots n^{5^{2010}}=n^{1+5+5^2+\ldots+5^{2010}}=\ldots=n^{\frac{5^{2011}-1}{4}}$ ………………………….…… **10p**

Calculează:

$1^5+5^0+1^{5^{2011}}+5^{0^{2011}}+2011^{0^5}=1+1+1+1+1=5$ ………………………………… **2p**

Calculează:

$5^{5^{2011}}:\left(1^5+5^0+1^{5^{2011}}+5^{0^{2011}}+2011^{0^5}\right)=5^{5^{2011}}:5=5^{5^{2011}-1}$ ………………………………… **5p**

Din egalitatea

$n^{5^{2011}-1}=5^{5^{2011}-1}\Rightarrow n=5$ ………………………………… **3p**

(20p) 2. **Un număr natural de două cifre diferite (scris în baza 10) este divizibil cu fiecare dintre cifrele sale. Demonstrați că numărul este divizibil cu suma cifrelor sale sau cu produsul cifrelor sale.**

Rezolvare:

$\overline{ab} = 10a + b, a \neq b \Rightarrow a \neq 0$ ………………………………….. 2p

$$\left.\begin{array}{c} b \mid \overline{ab} \Leftrightarrow b \mid 10a + b \Leftrightarrow b \mid 10a \\ b \mid \overline{ab} \Rightarrow b \neq 0 \\ a \mid \overline{ab} \Leftrightarrow a \mid 10a + b \Leftrightarrow a \mid b \text{ şi } b \neq 0 \Rightarrow a < b \end{array}\right\}$$ ………………………………….. 6p

Dacă

$$\left.\begin{array}{c} a = 1 \Rightarrow b \mid 10 \text{ şi } b > a, b \text{ cifră} \Rightarrow b \in \{2;5\} \\ a = 2 \Rightarrow b \mid 20 \text{ şi } b > a, b \text{ cifră} \Rightarrow b \in \{4\} \\ a = 3 \Rightarrow b \mid 30 \text{ şi } b > a, b \text{ cifră} \Rightarrow b \in \{6\} \\ a = 4 \Rightarrow b \mid 40 \text{ şi } b > a, b \text{ cifră} \Rightarrow b \in \{8\} \\ 5 \leq a \leq 9; \text{ nu există } b \text{ a.î. } b \mid 10a, b > a \\ \text{Soluțiile sunt } 12;15;24;36;48 \end{array}\right\}$$ ………………………………….. 8p

Pentru numerele 12, 24, 36, suma şi produsul cifrelor sunt divizori ai numărului. ………………………………….. 2p

Pentru numărul 15, doar produsul cifrelor este divizor al numărului. ………………………………….. 1p

Pentru numărul 48, doar suma cifrelor este divizor al numărului. ………………………………….. 1p

(25p) 3. **Scriem numerele $1,2,3,......,2010$. Ştergem două numere şi, în locul lor, scriem restul împărțirii sumei lor la 15. După un număr de paşi rămân scrise două numere, dintre care unul este 285.**

Care este cel de-al doilea număr dintre cele două numere rămase? Justificați.

Rezolvare:

Calculează:

$S = 1+2+3+...+2010 = 2011 \cdot 1005$ ………………………………………… **5p**

Observă că $15 \mid S$ ………………………………………… **5p**

$\left.\begin{array}{r} a+b=15c+r, r<15 \\ 15 \mid S-(a+b)+r \end{array}\right\}$ ………………………………………… **5p**

$15 \mid x+285, 15 \mid 285 \Rightarrow 15 \mid x$ ……………………………………... **5p**

$285 > 15 \Rightarrow x \text{ este un rest}$ ……………………………………... **5p**

$x < 15, x = 0$ ………………………………………… **5p**

(25p) 4. Suma mai multor numere naturale consecutive este 1000. Aflați numerele.

Rezolvare:

$a+(a+1)+...+(a+n)=1000$ 3p

$(n+1)\cdot a+\frac{n(n+1)}{2}=1000$ 1p

$(n+1)\cdot(2a+n)=2000$

Desompune convenabil numărul 2000 (făcând observații asupra parității factorilor). 4p

Cazul 1:

$n+1=1 \Rightarrow n=0\,(Fals)$ 2p

Cazul 2:

$\begin{cases} n+1=5 \\ 2a+4=400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=4 \\ a=198 \end{cases} \Rightarrow 198, 199, 200, 201, 202$ 5p

Cazul 3:

$\begin{cases} n+1=25 \\ 2a+4=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=24 \\ a=28 \end{cases} \Rightarrow 28, 29, ..., 52$ 5p

Cazul 4:

$\begin{cases} n+1=16 \\ 2a+4=125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=15 \\ a=55 \end{cases} \Rightarrow 55, 56, ..., 70$ 5p

Comisia de Concurs,