OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA JUDEȚEANĂ
09 aprilie 2011

CLASA a VI-a

(20p)1. Elementele mulțimii $M=\{x_0, x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$ îndeplinesc simultan condițiile:

a) Există $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, astfel încât $x_{k+1}=x_k+r$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$;

b) $x_3+x_7=x_{10}+1$;

c) $\{26, 41, 76\} \subset M$.

Arătați că $2011 \in M$.

(20p) 2. Fie triunghiurile ABC şi ADE dreptunghice şi isoscele de vârf A, $A \in (CE)$ şi $A \in (BD)$. Se consideră punctele M şi N mijloacele laturilor [BC], respectiv [DE]. Să se arate că:

a) DE || BC;

b) A, M, N sunt coliniare;

c) $MN=\frac{BC+DE}{2}$;

d) Dacă P este mijlocul segmentului [CD], atunci triunghiul PMN este dreptunghic isoscel.

(25p) 3. Să se arate că dintre oricare 12 numere întregi distincte se găsesc două a căror sumă sau diferență se divide cu 21.

(25p) 4. Se consideră şirul de numere: $x_1=121$, $x_2=1221$, $x_3=12221$, … , $x_{100}=1\underbrace{22\ldots2}_{100 \text{ cifre de } 2}1$.

a) Să se determine câte numere divizibile cu 3 sunt în şirul dat.

b) Să se demonstreze că toate numerele din şir sunt compuse.

c) Să se determine câte numere divizibile cu 13 sunt în şirul dat.

Notă:

1. *Toate subiectele sunt obligatorii.*
2. *Se acordă 10 puncte din oficiu.*
3. *Timpul de lucru este de 3 ore.*