OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA JUDEȚEANĂ
09 aprilie 2011

CLASA a VI-a
Barem de corectare

1. Elementele mulțimii $M=\{x_0, x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$ îndeplinesc simultan condițiile:

a) Există $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, astfel încât $x_{k+1}=x_k+r$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$;

b) $x_3+x_7=x_{10}+1$;

c) $\{26, 41, 76\} \subset M$.

Arătați că $2011 \in M$.

Soluție

Scrie $x_3=x_2+r=x_1+2r=x_0+3r$

Analog $x_7=x_0+7r$ şi $x_{10}=x_0+10r$ ………………………………………………………… 5p

Determină $x_0=1$ ……………………………………………………………………………5p

$26=1+n\cdot r$, $n\in \mathbb{N} \Rightarrow n\cdot r=25$

$41=1+k\cdot r$, $k\in \mathbb{N} \Rightarrow k\cdot r=40$

$76=1+p\cdot r$, $p\in \mathbb{N} \Rightarrow p\cdot r=75$

$r\geq 2$

$r|25$; $r|40$; $r|75 \Rightarrow r=5$ ……………………………………………………………………5p

$2011=1+s\cdot 5$, $s\in \mathbb{N} \Rightarrow s\cdot 5=2010 \Rightarrow s=402$ ……………………………………………… 5p

2. Fie triunghiurile ABC şi ADE dreptunghice şi isoscele de vârf A, ($A\in(CE)$ şi $A\in(BD)$). Se consideră punctele M şi N mijloacele laturilor [BC], respectiv [DE]. Să se arate că:

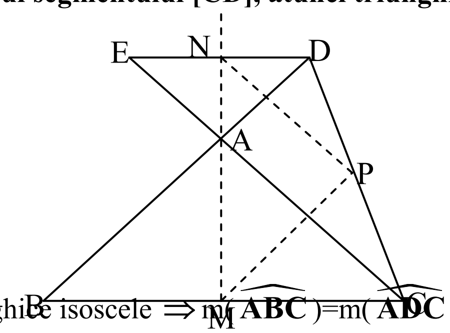
a) DE || BC;

b) A, M, N sunt coliniare;

c) $MN=\dfrac{BC+DE}{2}$;

d) Dacă P este mijlocul segmentului [CD], atunci triunghiul PMN este dreptunghic isoscel.

Soluție



a) Δ ABC şi Δ ADE dreptunghice isoscele $\Rightarrow m(\widehat{ABC})=m(\widehat{ADC})=45^0$ ………. 2p

$\widehat{ABC} \equiv \widehat{ADC}$ (alterne interne) $\Rightarrow BC||DE$ ………………………………………..3p

b) Δ ABC şi Δ ADE isoscele cu AM, AN mediane $\Rightarrow AM\perp BC$ şi $AN\perp DE$ …....2p

Din $AM\perp BC$ şi $BC||DE$ (conform punctului a) $\Rightarrow$ $AM\perp DE$ …………………….2p

Din $AM\perp DE$ şi $AN\perp DE$ $\Rightarrow$ A, M, N coliniare …………………………………...1p

c) AM şi AN sunt mediane corespunzătoare ipotenuzei în Δ ABC, respectiv Δ ADC dreptunghice $\Rightarrow AM=\dfrac{BC}{2}$ şi $AN=\dfrac{DE}{2}$ …………………………………………..3p

Str. N. Bălcescu nr. 26,
Iași - 700117
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Din A, M, N coliniare $\Rightarrow$ MN=AM+AN=$\frac{BC+DE}{2}$ ……………………………..2p

d) PM linie mijlocie în Δ CDB $\Rightarrow$ PM||BD şi PM=$\frac{BD}{2}$ …………………………..1p

PN linie mijlocie în Δ CDE $\Rightarrow$ PN||CE şi PN=$\frac{CE}{2}$ …………………...…………….1p

BD=AB+AD=AC+AE=CE $\Rightarrow$ PM=PN $\Rightarrow$ Δ PMN isoscel …………………………1p

$\sphericalangle$MPN $\equiv$ $\sphericalangle$CAD ($\sphericalangle$ cu laturi respectiv paralele) $\Rightarrow$ m($\widehat{MPN}$)=90^0
$\Rightarrow$ Δ PMN dreptunghic ……………………………………………………….2p

3. Să se arate că dintre oricare 12 numere întregi distincte se găsesc două a căror sumă sau diferență se divide cu 21.

Soluție

1) Dacă două numere dau acelaşi rest prin împărţirea cu 21 $\Rightarrow$ diferența lor este divizibilă cu 21………………………..……………………………………………………5p
2) Dacă cele 12 numere dau resturi diferite ……………………………………..2p

$x_k=c_k \cdot 21+r_k$, $r_k \in \{0, 1, 2, \dots , 20\}$ ………………………………………………..1p
Considerăm mulţimile:
$A_r=\{c \cdot 21 \pm r | c \in \mathbb{Z}\}$, unde $r \in \{0, 1, 2, \dots , 10\}$ ……………………………...….5p
cu $A_r \cap A_{r'}=\varnothing$, oricare ar fi $r \neq r'$ ………………………………………………….1p
Sunt 12 numere şi 11 mulțimi …………………………………………………….1p
Conform principiului cutiei, există o mulțime A_r ce conține cel puțin două numere distincte a, b ………………………………………………………………………………..5p
Avem a= $c_1 \cdot 21+r$ şi b= $c_2 \cdot 21-r$ …………………………………………………...2p
a+b=(c_1+c_2) $\cdot 21 \Rightarrow (a+b) \vdots 21$ …………………………………………………….2p
Finalizare: din 1) şi 2) $\Rightarrow$ concluzia ……………………………………………1p

4. Se consideră şirul de numere: $x_1=121$, $x_2=1221$, $x_3=12221$, … , $x_{100}=1\underbrace{22.......2}_{100\text{ cifre de }2}1$.

a) Să se determine câte numere divizibile cu 3 sunt în şirul dat.
b) Să se demonstreze că toate numerele din şir sunt compuse.
c) Să se determine câte numere divizibile cu 13 sunt în şirul dat.

Soluție

a) Dacă x_n este un număr din şir, atunci suma cifrelor lui x_n este 2n+2 ………………………2p
$3|x_n \Leftrightarrow 3|2n+2 \Leftrightarrow n=3k+2$ ……………………………………………………………....4p
$1 \leq 3k+2 \leq 100 \Rightarrow 0 \leq k \leq 32 \Rightarrow$ 33 numere divizibile cu 3 …………………………………..2p
b) $x_n=122\dots21=11 \cdot \underbrace{11...1}_{n+1\text{ ori}} \Rightarrow 11|x_n$, oricare ar fi $n \in \{1, 2, \dots , 100\} \Rightarrow$ x_n este compus ……5p

c) $x_n=11 \cdot \underbrace{11...1}_{n+1\text{ ori}}$

$13|x_n$, $(13, 11)=1 \Leftrightarrow 13|\underbrace{11...1}_{n+1\text{ ori}}$ ori ……………………………………………………………2p

$13|\underbrace{11...1}_{k\text{ ori}}$, $k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 6|k$ ……………………………………………………………...5p

$13|x_n \Leftrightarrow 6|n+1 \Leftrightarrow n=6k+5$ ……………………………………………………………..3p
$1 \leq 6k+5 \leq 100 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 15 \Rightarrow$ 16 numere divizibile cu 13 ………………………………….2p

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Str. N. Bălcescu nr. 26,
Iași - 700117
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro