OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA JUDETEANA

12 martie 2011

Clasa a V-a

SUBIECTUL		BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL
1		Dacă $p \neq 0$, atunci $3\left(6^p + 4 \cdot \overline{mn}\right)$ este număr par $\Rightarrow 2^q$ este impar $\Rightarrow q = 0$ Obţinem: $6^p + 4\overline{mn} = 288 \Rightarrow 6^p \leq 288 \Rightarrow$ p poate fi 1, 2 sau 3. $(m, n, p, q) \in \{(6, 3, 2, 0); (1, 8, 3, 0)\}$ Dacă $p = 0 \Rightarrow 3 + 12 \cdot \overline{mn} + 2^q = 865 \Leftrightarrow 12 \cdot \overline{mn} + 2^q = 862$ Pentru $q = 0 \Rightarrow 12 \cdot \overline{mn} = 861$ (F) $q = 1 \Rightarrow 12 \cdot \overline{mn} = 860$ (F) $q \geq 2 \Rightarrow 12 \cdot \overline{mn} + 2^q = 862 \Rightarrow 6 \cdot \overline{mn} + 2^{q-1} = 431$ (F)	**2p** **2p** **1p** **1p** **1p**
2	a	$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ $2 + (a+1) + (b+3) + (c+7) + (d+15) + (e+31) + (f+63) \geq$ $\geq 2 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 128 = 2^7$	**1p** **2p**
	b	Avem $a+1 \geq 2$, $b+3 \geq 2^2$, $c+7 \geq 2^3$, $d+15 \geq 2^4$, $e+31 \geq 2^5$, $f+63 \geq 2^6$. Atunci $(a+1) \cdot (b+3) \cdot (c+7) \cdot (d+15) \cdot (e+31) \cdot (f+63) \geq 2^{21}$ şi cu ipoteza avem $(a+1) \cdot (b+3) \cdot (c+7) \cdot (d+15) \cdot (e+31) \cdot (f+63) = 2^{21}$. Deducem a= b= c= d= e= f= 1	**2p** **1p** **1p**

3	a	Parolele din enunț sunt de următoarele forme: $\overline{abbb}$, $\overline{babb}$, $\overline{bbab}$, $\overline{bbba}$, a şi b fiind cifre în baza 10. Numerele scrise mai sus sunt numere naturale de patru cifre, deci nu încep cu cifra 0. Se consideră mulțimile: A= $\left\{\overline{abbb} / 1 \le a \le 9,\ 0 \le b \le 9,\ a \ne b\right\}$ B= $\left\{\overline{babb} / 0 \le a \le 9,\ 1 \le b \le 9,\ a \ne b\right\}$ C= $\left\{\overline{bbab} / 0 \le a \le 9,\ 1 \le b \le 9,\ a \ne b\right\}$ D= $\left\{\overline{bbba} / 0 \le a \le 9,\ 1 \le b \le 9,\ a \ne b\right\}$ Aceste mulțimi sunt disjuncte iar reuniunea lor reprezintă mulțimea M a parolelor din enunț. $\Rightarrow$ card M = card A + card B + card C + card D = 81+81+81+81 = 324.	**1p** **2p**
	b	b) $S = S_A + S_B + S_C + S_D$ $S_A =$ 1000+1111+1222+ … + 1999 – 1111 + + 2000+2111+2222+ … +2999 – 2222 + … + + 9000+9111+9222+ … +9999 – 9999 = = 1000 · 45 + (1000 · 45 + 111 · 9) + (1000 · 45 + 222 · 9) + …+ (1000 · 45 + 999 · 9) – 1111 · 45 = 1000 · 45 · 10 + 111 · 9 · 45 - 1111 · 45 = 45(10.000 + 999 – 1111) = 45 · 9888 Analog, S_B = 45 · 9899, S_C = 45 · 9989, S_D = 45 · 9998 Înseamnă că S = 45(9888+9899+9989+9998) = 45 · 39774 = 1.789.830	**0,5p** **1,5p** **1p** **0,5p**
	c	S = 1.789.830 $\Rightarrow$ S este divizibil cu 10	**0,5p**
4		$A=\left\{x \in \mathbb{N} / 2^{76} < x \le 2^{80}\right\}$ şi $B=\left\{x \in \mathbb{N} / 2^{70} < x \le 2^{77}\right\}$ $A \cap B=\left\{x \in \mathbb{N} / 2^{76} < x \le 2^{77}\right\}$ sau $A \cap B=\left\{2^{76}+1,\ 2^{76}+2, \ldots,\ 2^{77}\right\}$ $\operatorname{card}(A \cap B)=2^{76}$	**1,5p** **1,5p** **2p** **2p**