INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN OLT

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA

12 februarie 2011
Clasa a VI-a

SUBIECTUL		BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL
1	a	Ecuația se scrie	
		$\left(\frac{2011}{x}-1\right)+\left(\frac{2012}{x+1}-1\right)+\ldots+\left(\frac{2109}{x+98}-1\right)+\left(\frac{2110}{x+99}-1\right)=0$	1p
		$\frac{2011-x}{x}+\frac{2011-x}{x+1}+\frac{2011-x}{x+2}+\ldots+\frac{2011-x}{x+99}=0$	1p
		$(2011-x)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+99}\right)=0$	1p
		Dacă $x\in\mathbb{N}^*$, atunci	
		$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+99}\neq 0$	1p
		Deci 2011 –x=0 sau x=2011	1p
	b	Dacă $a=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}$,	
		$p_1, p_2, \ldots, p_k$ numere prime distincte două câte două atunci numărul divizorilor naturali ai lui a este $(1+n_1)(1+n_2)\ldots(1+n_k)$	1p
		$N=5^n\cdot(1+5+5^2+5^3)=5^n\cdot 156=2^2\cdot 3\cdot 13\cdot 5^n$	0,5p
		Rezultă $(1+2)(1+1)\{1+1)(1+n)=120 \Rightarrow n=9$	0,5p
2		Dacă p=2, atunci $\overline{abc}=\{112,\ 121,\ 211\}$	1p
		Deoarece $p^2=4$, avem: $(d,e)\in\{(0,\ 4);\ (4,\ 0);\ (1,\ 3);\ (3,\ 1);\ (2,\ 2)\}$	1p
		Avem $3\cdot 5=15$ numere	1p
		Dacă p=3, atunci $\overline{abc}=\{113,\ 131,\ 311\}$	1p
		Deoarece $p^2=9$, avem:	
		$(d,e)\in\{(0,9);(9,0);(1,8);(8,1);(2,7);(7,2);(3,6);(6,3);(4,5);(5,4)\}$	1p
		Avem $3\cdot 10=30$ numere	1p
		Pentru $p\geq 5$, problema nu are soluții deoarece: d+e<25	0,5p
		Finalizare: sunt 45 numere	0,5p

3	a	Notăm valoarea comună a rapoartelor cu k şi avem: $A_1A_2=2k,\ A_2A_3=3k,\dots,\ A_{2010}A_{2011}=2011k$ a) $A_{11}A_{29}=A_{11}A_{12}+A_{12}A_{13}+\dots+A_{28}A_{29}=12k+13k+\dots+29k=369k$ $A_nA_{n+3}=A_nA_{n+1}+A_{n+1}A_{n+2}+A_{n+2}A_{n+3}=(n+1+n+2+n+3)k=(3n+6)k$ $[A_{11}A_{29}]\equiv[A_nA_{n+3}]\Leftrightarrow 3n+6=369\Leftrightarrow n=121$	**0,5p** **0,5p** **0,5p** **0,5p**
	b	Presupunem că există $n\in\{1,2,3,\dots,2011\}$ astfel încât $A_{1001}A_n=A_nA_{2011}\Rightarrow 1002k+1003k+\dots+nk=(n+1)k+(n+2)k+\dots+2011k$ $\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1001\cdot1002}{2}=\frac{2011\cdot2012}{2}-\frac{n(n+1)}{2}$ $2n(n+1)=1001\cdot1002+2011\cdot2012$ $\left.\begin{array}{l}4/2n(n+1)\\4/2012\end{array}\right\}\Rightarrow 4/1001\cdot1002$ fals, deci presupunerea făcută este falsă.	**0,5p** **0,5p** **1p**
	c	$A_{11}A_{29}=A_{121}A_{124}\Rightarrow A_{29}M=MA_{121}$ $m(\measuredangle A_{121}A_{29}N)=180^0-109^0 19' 19''=70^0 40' 41''$ $\Rightarrow \Delta A_{29}NA_{121}$ isoscel, deci $NM\perp A_{11}A_{124}$.	**1p** **1p** **1p**
4		**Cazul I)** $B\in Int(\measuredangle MON)$. Fie (OP semidreapta opusă lui (ON. Notăm $\measuredangle AOE=x=\measuredangle EOM$, $\measuredangle NOF=y=\measuredangle FOB$ şi $\measuredangle BOM=z$. Observăm că $z=90^0-2y$. Cum P, O, N sunt coliniare avem: $\measuredangle AOP=\measuredangle NOB=2y$ (opuse la vârf), deci $\measuredangle AOM=2x=90^0+2y\Rightarrow\measuredangle AOE=\measuredangle EOM=x=45^0+y$ $\measuredangle EOF=x+y+z=(45^0+y)+y+(90^0-2y)=135^0$	**0,5p** **0,5p** **0,5p** **0,5p**
		Cazul II) $A\in Int(\measuredangle MON)$. Cu aceleaşi notaţii şi în plus $\measuredangle AON=t$, avem: $t+2x=90^0,\ 2y+t=180^0\Rightarrow 2x+2y+2t=270^0$ $\measuredangle EOF=x+y+t=135^0$.	**1p** **0,5p**
		Cazul III) $A, B\notin Int(\measuredangle MON)$, dar $A\in Int(\measuredangle POM)$, avem: $2x+2y+90^0=180^0\Rightarrow$ $\Rightarrow\measuredangle EOF=x+y+90^0=135^0$	**1p** **0,5p**
		Cazul IV) $A, B\notin Int(\measuredangle MON)$, dar $B\in Int(\measuredangle POM)$, avem: $\measuredangle EOF+x-t=y$ (1), $z+t=90^0$ (2), $z+x=y+\measuredangle EOF$ (3) Egalitatea (1) devine : $\measuredangle EOF+x-90^0+z=y$ sau $\measuredangle EOF+y+\measuredangle EOF-90^0=y\Rightarrow\measuredangle EOF=45^0$	**1p** **1p**