Clasa a VI-a

1) Lungimile laturilor unui triunghi sunt $n + 2012$, 1, $m + 2012$, unde $n, m \in \mathbb{N}$. Stabiliţi natura triunghiului.

Cătălin Barbu (prelucrare Gazeta Matematică)

Soluţie: Din inegalitatea triunghiului avem: $n + 2012 + 1 > m + 2012$ sau $m - n < 1$ (1), respectiv $m + 2012 + 1 > n + 2012$ sau $m - n > -1$ (2). Din relaţiile (1) şi (2) avem: $-1 < m - n < 1$.Cum$m - n \in \mathbb{Z}$rezultă $m = n$, deci triunghiul este isoscel.

2) Se dă un unghi cu măsura de $68°$. Folosind numai rigla, echerul şi compasul, construiţi în interiorul său un unghi cu măsura de $11°30'$. (Explicaţi modul în care aţi procedat.)

Cătălin Barbu (Prelucrare GM)

Soluţie. Fie $m(\angle AOB) = 68°$. Construim $OC \perp OB$, deci $m(\angle COB) = 90°$. Construim $(OD$ bisectoarea unghiului COB, deci $m(\angle AOD) = 68° - 45° = 23°$. Construim $(OE$ bisectoarea unghiului AOD, deci $m(\angle AOE) = m(\angle DOE) = 11°30'$.

3) Paralelele duse prin vârfurile B şi C ale unui triunghi ABC la bisectoarea AD $(D \in (BC))$ a unghiului BAC intersectează dreptele AC, respectiv AB în E, respectiv F.

a) Arătaţi că triunghiurile EBF şi BEC sunt congruente;

b) Dacă EF intersectează BC în M, demonstraţi că $MA \perp AD$.

Gazeta Matematică

Soluţie. a) Triunghiurile BAE şi ACF sunt isoscele. $\Delta EAF \equiv \Delta CAB$ (LUL), de unde $EF = BC$ şi $BF = CE$, de unde rezultă concluzia.

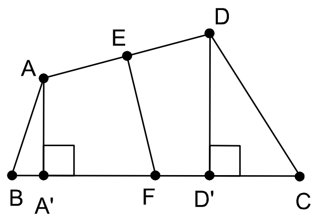
b) Din $\Delta EBF \equiv \Delta BEC$ rezultă $\angle AFE = \angle BCE$, deci ΔMFC este isoscel. Rezultă $\Delta AFM \equiv \Delta ACM$, deci MA este bisectoarea unghiului FMC. Cum MFC este isoscel, rezultă MA înălţime. Avem $MA \perp CF$, deci $MA \perp AD$.

clasa a VII-a

1) Fie patrulaterul convex $ABCD$, E, F mijloacele laturilor AD, respectiv BC. Să se arate că $A[ABFE] = A[DCFE]$ dacă şi numai dacă $AD \parallel BC$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Fie $AA^{'} \perp BC$, $DD^{'} \perp BC$, $A^{'}, D^{'} \in BC$. Deoarece $AE \equiv DE$ rezultă că $A[AEF] = A[DEF]$.



Cum $A[BAF] = \dfrac{BF \cdot AA^{'}}{2}$ şi $A[CDF] = \dfrac{CF \cdot DD^{'}}{2}$, iar $BF \equiv CF$, avem că $A[ABFE] = A[DCFE]$, echivalent cu

$$A[ABF] + A[AEF] = A[CDF] + A[DEF]$$

sau $A[ABF] = A[CDF]$, adică $\dfrac{BF \cdot AA^{'}}{2} = \dfrac{CF \cdot DD^{'}}{2}$, echivalent cu $AA^{'} \equiv DD^{'}$, echivalent cu $AD \parallel BC$.

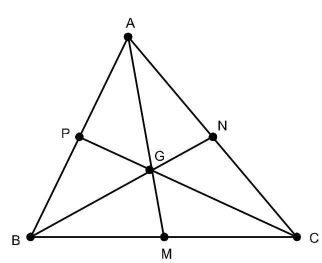
2) Fie a, b, c lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB ale triunghiului ABC, astfel încât $5a^2 \leq b^2 + c^2$. Să se arate că

$$a \leq \frac{1}{3}(m_a + m_b + m_c).$$

unde m_a, m_b, m_c reprezintă lungimile medianelor corespunzătoare laturilor BC, CA, respectiv AB.

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie: Fie M, N, P mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB şi G centru de greutate al triunghiului ABC.



În triunghiul BCG avem ca $BC < BG + CG$de unde:$a < \frac{2}{3}(m_b + m_c)$ (1).Arătăm că:$a < \frac{2}{3}m_a$. (2). Inegalitatea (2) este echivalentă cu $9a^2 \leq 4m_a^2$echivalent cu

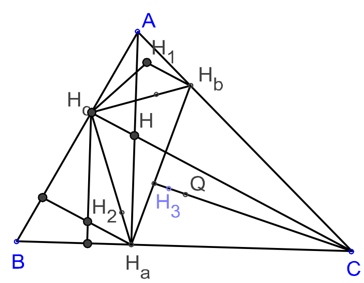
$$9a^2 \leq 2(b^2 + c^2) - a^2,$$

echivalent cu $5a^2 \le b^2+c^2$,inegalitate adevărată conform ipotezei. Deci inegalitatea (2) are loc. Din (1) si (2),rezultă concluzia problemei.

3) Fie H_a, H_b, H_c picioarele înălţimilor duse din vârfurile A, B, respectiv C ale unui triunghi ABC, iar H_1,H_2, H_3 sunt ortocentrele triunghiurilor AH_bH_c, BH_cH_a, respectiv CH_aH_b. Arătaţi că dreptele H_aH_1, H_bH_2, H_cH_3 sunt concurente.

Cătălin Barbu, Bacău

Soluţie. Fie H ortocentrul triunghiului ABC.



Deoarece $HC \perp AB$ şi $H_aH_2 \perp AB$ rezultă $HC \| H_aH_2$. Analog, $HA \| H_cH_2$, de unde obţinem că $[HH_c] \equiv [H_aH_2]$. Analog se arată că $[HH_c] \equiv [H_bH_1]$, deci $[H_aH_2] \equiv [H_bH_1]$Deoarece $H_aH_2 \perp AB$ şi $H_bH_1 \perp AB$, rezultă $H_aH_2 \| H_bH_1$.Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că patrulaterul $H_aH_2H_1H_b$ este paralelogram, deci dreapta H_aH_1 trece prin punctul M -mijlocul segmentului H_bH_2. Analog se arată că şi dreapta H_cH_3 trece prin mijlocul segmentului H_bH_2, deci dreptele H_aH_1,H_bH_2,H_cH_3 sunt concurente.

CLASA A VIII-A

1) Să se arate că în orice triunghi dreptunghic de laturi a, b, c cu ipotenuza a şi înălţimea h corespunzătoare ipotenuzei, are loc inegalitatea:

$$(b+c)\cdot\sqrt{2}-\frac{3}{2}\cdot a \le h.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Deoarece $h=\dfrac{b\cdot c}{a}$ inegalitatea este echivalentă cu $a(b+c)\cdot\sqrt{2} \le bc+\dfrac{3}{2}\cdot a^2$,echivalent cu

$$2a(b+c)\cdot\sqrt{2} \le 2bc+3(b^2+c^2).$$

Ridicând la pătrat avem că $8a^2(b+c)^2 \leq 4b^2c^2 + 12bc(b^2+c^2) + 9(b^2+c^2)^2$,echivalent cu

$$0 \leq 9(b^2+c^2) + 4b^2c^2 + 12bc(b^2+c^2) - 8(b^2-c^2) - 16(b^2+c^2),$$

echivalent cu $0 \leq (b^2+c^2) + b^2c^2 - 4bc(b^2+c^2)$,echivalent cu $0 \leq (b^2+c^2-2bc)^2$, deci $0 \leq (b-c)^4$. Deci inegalitatea de la care am pornit este adevarată.Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $b = c$, adică triunghiul este dreptunghic isoscel.

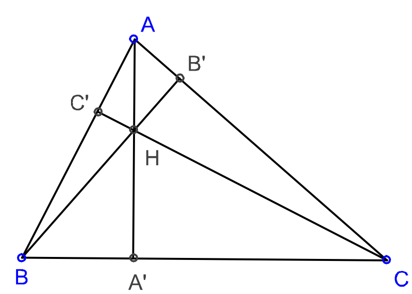
2) În vârfurile A, B şi C ale triunghiului oarecare ABC, de aceeaşi parte a planului (ABC), se ridică perpendicularele AD, BE şi CF, astfel încât $AD = BC, BE = AC$ şi $CF = AB$. Fie H ortocentrul triunghiului ABC şi O centrul cercului circumscris triunghiului DEF. Să se arate că:

a) $AH^2 + BC^2 = BH^2 + CA^2 = CH^2 + AB^2$,

b) $OH \perp (DEF)$.

Mihai Miculiţa, Oradea

Soluţie. a) Fie A' piciorul înălţimii duse din A. Din teorema lui Pitagora obţinem

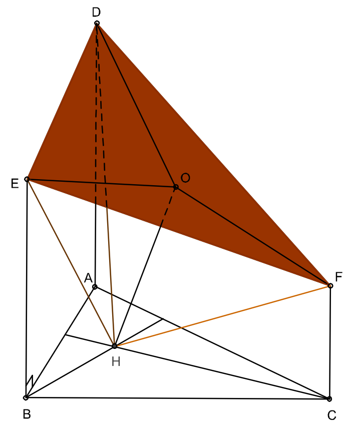


$$HB^2 - HC^2 = (HA'^2 + A'B^2) - (HA'^2 + CA'^2) = A'B^2 - A'C^2,$$

$$AB^2 - AC^2 = (AA'^2 + A'B^2) - (AA'^2 + CA'^2) = A'B^2 - A'C^2,$$

de unde obţinem $BH^2 + CA^2 = CH^2 + AB^2$. Analog se arată că $AH^2 + BC^2 = BH^2 + CA^2$.

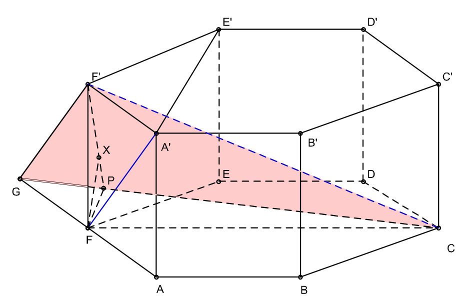
b) Utilizând subpunctul precedent şi faptul că $AD = BC, BE = AC$ şi $CF = AB$, obţinem $AH^2 + AD^2 = BH^2 + BE^2 = CH^2 + CF^2$, de unde $HD = HE = HF$. Cum $OD = OE = OF$ rezultă concluzia.



3) Fie prisma hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu $AB = a$ şi $BB' = b$. Dacă $A'F \perp F'C$ determinaţi distanţa dintre dreptele $A'F$ şi CF'.

Petru Braica, Satu Mare

Soluţie: Fie G pe AF astfel încât $GF = FA = a$. Patrulaterul $GFF'A'$ este paralelogram. În ΔGAC, $m(\sphericalangle GAC) = 90^\circ$ obţinem $GC = a\sqrt{7}$ şi în $\Delta GF'C$ dreptunghic în F' avem $F'G^2 + F'C^2 = GC^2$ sau $b^2+a^2+b^2+4a^2 = 7a^2$sau $b^2 = a^2$, adică $a = b$. $d(A'F, CF') = d(F, (GF'C))$ Fie $FP \perp GC$, rezultă din teorema celor trei perpendiculare că $F'P \perp GC$. Fie $FX \perp F'P$, rezultă că $d(A'F, CF') = FX$.



$$FP = \frac{1}{2} \cdot d(A, GC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a \cdot a\sqrt{3}}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$F'P = \sqrt{\frac{21a^2}{49} + a^2} = \sqrt{\frac{70a^2}{49}} = \frac{a\sqrt{70}}{7}$$

$$FX = \frac{FF' \cdot FP}{F'P} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{21}}{7}}{\frac{a\sqrt{70}}{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{70}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$$

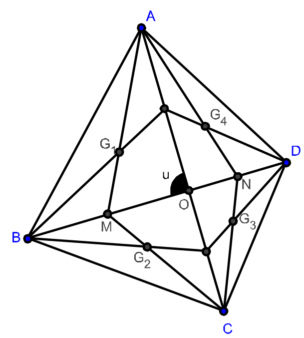
CLASA A IX-A

1) Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor unui patrulater convex $ABCD$ şi G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA. Să se arate că $G_1G_3 = G_2G_4$ dacă şi numai dacă

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Nicuşor Minculete, Braşov

Soluţie: "$\Rightarrow$ " Fie $M, N \in BD$ astfel încât $BM = MO$ şi $ON = ND$.



Cum $\frac{AG_1}{G_1M} = \frac{AG_4}{G_4N} = 2 \Rightarrow G_1G_4 \parallel MN$, iar $G_1G_4 = \frac{2}{3}MN$. Analog $G_2G_3 = \frac{2}{3}MN$ şi $G_2G_3 \parallel MN$. Prin urmare rezultă că patrulaterul $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram. Cum $G_1G_3 = G_2G_4$ rezultă că $G_1G_2G_3G_4$ este dreptunghi $\Rightarrow G_1G_2 \perp G_1G_4$, iar $G_1G_2 \parallel AC$ şi $G_1G_4 \parallel BD$ ceea ce înseamnă că $AC \perp BD$. Din teorema lui Pitagora în triunghiurile AOB, BOC, COD, AOD, rezultă: $AB^2+CD^2= AO^2+BO^2+CO^2+OD^2= BC^2+AD^2$

„$\Leftarrow$” Dacă $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ şi notăm $m(\sphericalangle AOB) = u$, avem $2OA \cdot OB \cos u = OA^2 + OB^2 - AB^2$,

$$2OC \cdot OD \cos u = OC^2 + OD^2 - CD^2,$$

$$2\cos u(OA\cdot OB+OC\cdot OD) = AO^2+BO^2+CO^2+OD^2-(AB^2+CD^2)$$

$$-2\cos u(OA\cdot OB+OC\cdot OD) = OA^2+BO^2+CO^2+OD^2-(BC^2+AD^2)$$

Egalând relaţiile de mai sus obţinem: $2\cos u(OA \cdot OB + OC \cdot OD + OC \cdot OD+OD\cdot OA) = 0$,deci $\cos u = 0$, adică $m(\sphericalangle AOB) = 90^0 \Rightarrow AC \perp BD$.

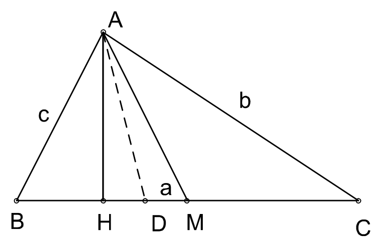
Cum $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram şi $AC \parallel G_1G_2$, iar $BD \parallel G_1G_4$ rezultă $G_1G_2 \perp G_1G_4$, adică $G_1G_2G_3G_4$ este dreptunghi $\Rightarrow G_1G_3 = G_2G_4$.

2) Să se arate că în orice triunghi lungimea bisectoarei dintr-un vârf este mai mică sau egală decât lungimea medianei din acelaşi vârf.

(Gazeta Matematică)

Solutie. Dacă $AB = AC \Rightarrow l_A = m_A$. Fie că $AB < AC$.

Cazul I : B- ascuţit , AM-mediană , $AD-$ bisectoare, AH-inaltime

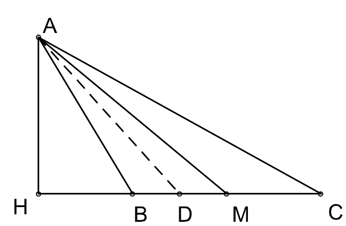


$$AC > AB \Longrightarrow \widehat{B} > \widehat{C} \Longrightarrow \widehat{BAH} = 90 - \widehat{B} < 90 - \widehat{C} = \widehat{HAC}$$

$\widehat{BAH} < \widehat{HAC} \Longrightarrow H \in [BD]$. Conform teoremei bisectoarei $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} < 1 \Longrightarrow BD < DC \triangle AHD$:

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 < AH^2 + HM^2 = AM^2 \Longrightarrow l_A < m_A$$

Cazul II: B- obtuz sau drept, $B \in HC$ sau $B = H$



Evident $D \in BM.AD^2 = AH^2 + HD^2 < AH^2 + HM^2$sau $l_a < m_a$.

3) Fie P un punct situat în interiorul unui triunghi echilateral ABC, iar $A^{'}, B^{'}, C^{'}$ punctele de intersecţie ale dreptelor AP, BP, CP cu laturile BC, CA, respectiv AB. Determinaţi punctele P pentru care

$$A^{'}B^2 + B^{'}C^2 + C^{'}A^2 = AB^{'2} + BC^{'2} + CA^{'2} \qquad (1)$$

Cătălin Barbu, Bacău

Soluţie. Notăm ariile triunghiurilor $\Delta ABC, \Delta APB, \Delta APC$ cu x, y, z. Avem

$$\frac{BA^{'}}{A'C} = \frac{\Delta AA^{'}B}{\Delta AA'C} = \frac{\Delta BPA^{'}}{\Delta CPA'} = \frac{\Delta AA^{'}B - \Delta BPA^{'}}{\Delta AA'C - \Delta CPA'} = \frac{\Delta APB}{\Delta APC} = \frac{y}{z}.$$

Dacă $AB = BC = CA = a$, atunci $BA^{'} = \frac{ay}{y+z}; A^{'}C = \frac{az}{y+z}$. Analog se obţin alte patru relaţii. Utilizând relaţiile de tip (2) în (1) obţinem:

$$\frac{y^{\ 2}}{(y+z)^2} + \frac{z^2}{(z+x)^2} + \frac{x^2}{(x+y)^2} = \frac{z^2}{(y+z)^2} + \frac{x^2}{(z+x)^2} + \frac{y^2}{(x+y)^2} :$$

$$\frac{y^2 - z^2}{(y+z)^2} + \frac{z^2 - x^2}{(z+x)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x+y)^2} = 0,$$

care poate fi simplificată $\sum\limits_{cyc} \frac{x-y}{x+y} = 0$,şi rescrisă astfel: $\frac{(x-y)(z-x)(z-y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 0$.De aici rezultă că $x = y$ sau $z = x$ sau $z = y$, rezultă că orice punct de pe medianele triunghiului verifică condiţia cerută

Soluţia 2. Fără a restrânge generalitatea presupunem că latura triunghiului are lungimea egală cu 1 şi notăm cu x, z, y lungimile segmentelor $BA^{\shortmid}$, $CB^{\shortmid}$, respectiv $AC^{\shortmid}$.

Din teorema lui Ceva rezultă $xzy = (1-x)(1-y)(1-z)$sau

$$2xyz - (xy + yz + zx) - 1 = 0 \qquad (1)$$

Relaţia dată în problemă este echivalentă cu $x^2 + y^2 + z^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 + (1-z)^2$sau $2(x+y+z) = 3$. Din relaţiile (1) şi (2) rezultă

$$xzy - \frac{1}{2}(xy + yz + zx) + \frac{1}{4} = 0$$

sau $xzy - \frac{1}{2}(xy + yz + zx) + \frac{1}{4}(x + y + z) - \frac{1}{8} = 0$,egalitate echivalentă cu $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$, de unde rezultă că $x = \frac{1}{2}$, sau $y = \frac{1}{2}$, sau $z = \frac{1}{2}$, deci punctul P aparţine măcar unei mediane a triunghiului ABC.Fie că P aparţine medianei din A Deoarece $x = \frac{1}{2}$ rezultă $yz = (1-y)(1-z)$,sau $z + y = 1$. Relaţia $2(x+y+z) = 3$ fiind evident îndeplinită, rezultă că orice punct de pe medianele triunghiului verifică condiţia cerută.

CLASA a X-a

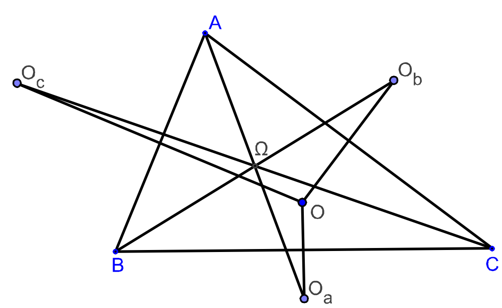
1) Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC şi O_a, O_b, O_c simetricele lui O faţă de laturile BC ,CA, respectiv AB. Să se arate că

a) dreptele AO_a, BO_b şi CO_c sunt concurente.

b) centrul cercului circumscris triunghiului $O_aO_bO_c$ este ortocentrul triunghiului ABC.

Cătălin Barbu, Bacău

Soluţie. a) Considerăm un reper complex având originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Patrulaterul OBO_aC fiind romb rezultă $o + o_a = b + c$ .Atunci, punctul Ω mijlocul segmentului AO_a are afixul $\omega = \frac{a+o_a}{2} = \frac{a+b+c}{2}$. Analog se arată că punctul Ω este mijlocul segmentelor BO_b şi CO_c, deci dreptele AO_a, BO_b şi CO_c sunt concurente în Ω.



b) Considerăm un reper complex având originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Atunci, $HO_a = |h - o_a| = |(a + b + c) - (b + c)| = |a| = R$. Analog se arată că $HO_b = |b| = R$ şi $HO_c = |c| = R$, de unde rezultă concluzia.

2) Fie I centrul cercului înscris într-un triunghi ABC. Dacă mediana AM intersectează cercul înscris în punctele K şi L, iar cercul circumscris triunghiului ABC în P, astfel încât $AK = KL = LP$, arătaţi că

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

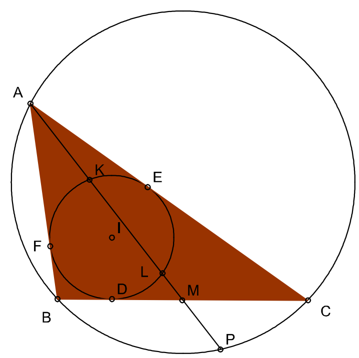
unde a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB.

Ion Pătraşcu (Craiova), Florentin Smarandache (USA)

Solutie. Fie $AK = KL = LP = x$. Atunci $AE^2 = AK \cdot AL = 2x^2$. Dar $AE = p-a$ (D, E, F sunt punctele de contact dintre cercul înscris cu laturile BC, CA, respectiv AB.). Atunci, $(p-a)^2 = 2x^2$.Din puterea punctului faţă de un cerc avem $ML \cdot (ML + x) = MD^2$. $PM \cdot MA = MB \cdot MC$.Fie $ML = t$. Avem

$$x \cdot (t + x) = MD^2. \tag{2}$$

$$(x - t)(2x + t) = \frac{a^2}{4} \tag{3}$$



$CD = p - c, CM = \frac{\alpha}{2}$

$$MD = p - c - \frac{a}{2} \qquad (4)$$

Din (1),(2),(3),(4) rezultă $2x^2 - xt - t^2 = \frac{a^2}{4}$

$$(p-a)^2 - (\frac{b-c}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$(b+c-a)^2 - (b-c)^2 = a^2$$

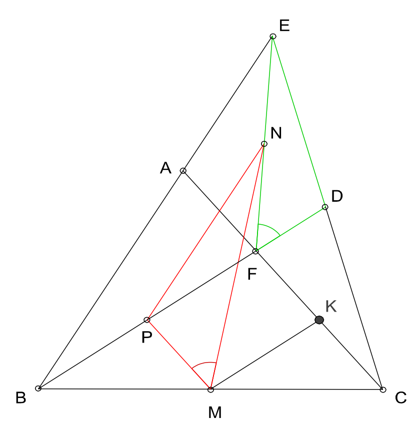
$$(b+c-a+b-c)(b+c-a-b+c) = a^2$$

$$(2b-a)(2c-a) = a^2 \Longleftrightarrow 2bc = a(b+c)$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

3) Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, F punctul de intersecţie al diagonalelor AC şi BD, E punctul de intersecţie dintre dreptele AB şi CD. Dacă M, N şi P sunt mijloacele segmentelor BC, EF, respectiv BF arătaţi că triunghiurile EFD şi NMP sunt asemenea.

Cătălin Barbu (Bacau) şi Mihai Miculiţa (Oradea)



Soluţie. Cum $PN \| BE$ $PM \| FC$ avem $\angle EAC = \angle NPM$ şi $\frac{PN}{BE} = \frac{PM}{FC} = \frac{1}{2}$.Cum $ABCD$ este patrulater inscriptibil $\angle EDF = \angle ADE + \angle ADB = \angle ABC + \angle ACB = \angle EAC$, şi $AF \cdot FC = BF \cdot FD$.de unde

$$\angle EAC = \angle NPM = \angle EDF. \tag{1}$$

Cum $\angle EAF = \angle EDF = 180° - \angle BAC$ obţinem

$$\sin EAF = \sin BAC. \tag{2}$$

Din teorema sinusurilor în triunghiurile BED şi BFA, cu (3), rezultă $\frac{BE}{BF} = \frac{2R_1 \sin EDF}{2R_2 \sin BAF} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{2R_1 \sin ABF}{2R_2 \sin ABF} = \frac{ED}{AF}$,(unde R_1 şi R_2 sunt razele cercurilor circumscrise triunghiurilor BED şi BFA), deci $BE \cdot AF = BF \cdot ED$.Din (2) şi (4) rezultă $\frac{FC}{BE} = \frac{FD}{ED}$. Urmează, $\frac{FD}{ED} = \frac{PM}{PN}$, iar din (2) rezultă concluzia.