"Micii matematicieni"
ediţia a VII-a

28 aprilie 2012 *concurs pentru elevii claselor a III a – a VIII a*

Clasa a VIII- a

Subiectul I (20 puncte) :

1. Fie numerele $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ și $b = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
   a) Verificați dacă $3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + a + b$
   b) Să se arate că $a^n + b^n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Moș Crăciun împarte, în mode gal, $10n - 5$ bomboane celor $3n + 1$ elevi ai unei clase ($n \in \mathbb{N}^*$). Calculați câte bomboane a primit fiecare elev.

Subiectul II (20 puncte) :

1. Demonstrați egalitatea
$$(x-1)^2 + (2y+1)^2 + 4(2-xy) = (x-2y-1)^2 + 9$$
2. Să se demonstreze că
$$(7x^2 - 5x) \cdot (7x^2 - 5x + 6\ ) + 10 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$
3. Determinați $x, y \in [-1,0]$ care verifică egalitatea:
$$\sqrt{(x-1)^2 + (2y+1)^2 + 4(2-xy)} + 2x + y = 0$$

Subiectul III (20 puncte) :

1. Într-o piramidă triunghiulară regulată numerele care exprimă aria laterală și volumul sunt egale. Demonstrați că $h^2 = \frac{9l^2}{l^2-108}$, unde h, l reprezintă înălțimea, respectiv latura bazei.
2. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AD \perp BC$ și $[AB] \equiv [AC]$. Arătați că $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$.

Succes !

- Toate subiectele sunt **obligatorii.**
- Durata probei este de **120 minute** din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi..
- Elevul are dreptul să rezolve subiectele în orice ordine dorește.