BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a X-a

1. Fie a şi b două numere reale nenule şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Arătaţi că orice rădăcină complexă şi nereală z_0 a ecuaţiei $z^n + az^{n-1} + b = 0$, satisface: $|z_0| \leq \sqrt[n]{|b| \cdot (n-1)}$.

Revista Sinus Nr. 2-3 (20-21)/2011

Soluţia 1: Fie $u = z_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ soluţie a ecuaţiei $z^n + az^{n-1} + b = 0$, deci $u + \frac{b}{u^{n-1}} = -a$. Cum $a \in \mathbb{R}$, deducem că numărul $v = u + \frac{b}{u^{n-1}}$ este real, deci $v = \bar{v}$. Obţinem că $u + \frac{b}{u^{n-1}} = \bar{u} + \frac{b}{\bar{u}^{n-1}}$ (b este real), adică $u - \bar{u} = \frac{b}{\bar{u}^{n-1}} - \frac{b}{u^{n-1}}$. Atunci $u - \bar{u} = \frac{b\left(u^{n-1} - \bar{u}^{n-1}\right)}{\left(u \cdot \bar{u}\right)^{n-1}}$ adică $u - \bar{u} = \frac{b\left(u - \bar{u}\right)\left(u^{n-2} + u^{n-3}\bar{u} + \ldots + \bar{u}^{n-2}\right)}{|u|^{2n-2}}$. Împărţind prin $u - \bar{u} \neq 0$ ($u \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$) deducem că $|u|^{2n-2} = b\left(u^{n-2} + u^{n-3}\bar{u} + \ldots + \bar{u}^{n-2}\right)$.

Trecem la modul şi ţinem cont că $\left|u^{n-2} + u^{n-3}\bar{u} + \ldots + \bar{u}^{n-2}\right| \leq |u|^{n-2} + |u|^{n-3}|\bar{u}| + \ldots + |\bar{u}|^{n-2} = (n-1)|u|^{n-2}$ (din inegalitatea modulului şi $|u| = |\bar{u}|$). Obţinem $|u|^{2n-2} \leq |b|(n-1)|u|^{n-2} \Leftrightarrow |u|^n \leq |b|(n-1)$, de unde $|u| \leq \sqrt[n]{|b|(n-1)}$.

Soluţia 2 (folosind forma trigonometrică): Considerăm scrierea trigonometrică $z_0 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\alpha \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ şi înlocuind în ecuaţie obţinem: $r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) + ar^{n-1}(\cos(n-1)\alpha + i\sin(n-1)\alpha) + b = 0$. De aici avem că $\begin{cases} r^n \cos n\alpha + ar^{n-1}\cos(n-1)\alpha + b = 0 \\ r^n \sin n\alpha + ar^{n-1}\sin(n-1)\alpha = 0 \end{cases}$.

Înmulţind prima ecuaţie cu $-\sin(n-1)\alpha$ şi a doua cu $\cos(n-1)\alpha$ şi adunându-le, obţinem: $r^n \sin\alpha = b\sin(n-1)\alpha$. Prin trecere la modul avem că: $r^n|\sin\alpha| = |b| \cdot |\sin(n-1)\alpha|$. Folosind inegalitatea $|\sin n\alpha| \leq n|\sin\alpha|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\sin\alpha \neq 0$ deducem că: $r \leq \sqrt[n]{|b| \cdot (n-1)}$.

<u>*Barem:*</u>

Deduce că numărul $v = u + \frac{b}{u^{n-1}}$ este real, unde $u = z_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ soluţie a ecuaţiei	1p
Obţine că $u + \frac{b}{u^{n-1}} = \bar{u} + \frac{b}{\bar{u}^{n-1}}$	2p
Găseşte că $\|u\|^{2n-2} = b\left(u^{n-2} + u^{n-3}\bar{u} + \ldots + \bar{u}^{n-2}\right)$	2p
Finalizare	2p

2. O funcţie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea că există $n \geq 3$ număr natural astfel încât $f(a_1, a_2) + f(a_2, a_3) + \ldots + f(a_n, a_1) = 2011n$, pentru orice numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Să se arate că există o funcţie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x, y) = g(x) - g(y) + 2011, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Claudia Marchitan

Soluţie: Pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ obţinem $f(0,0) = 2011$.

Pentru $a_1 = x \in \mathbb{R}$ şi $a_2 = \ldots = a_n = 0$ găsim $f(x,0) + (n-2)f(0,0) + f(0,x) = 2011n$, de unde $f(x,0) + f(0,x) = 2011 \cdot 2$.

Pentru $a_1 = x \in \mathbb{R}$, $a_2 = y \in \mathbb{R}$ şi $a_3 = \ldots = a_n = 0$ deducem $f(x,y) + f(y,0) + (n-3)f(0,0) + f(0,x) = 2011n$. Ţinând cont de relaţiile anterioare şi înlocuind $f(0,0)$, respectiv $f(0,x)$ obţinem $f(x,y) = f(x,0) - f(y,0) + 2011$.

Considerând funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $g(x) = f(x,0), \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă concluzia.

<u>*Barem:*</u>

Obţine $f(0,0) = 2011$	2p
Obţine $f(x,0) + f(0,x) = 2011 \cdot 2$	2p
Deduce $f(x,y) = f(x,0) - f(y,0) + 2011$	2p
Finalizare	1p

3. Determinați numerele naturale nenule α,β,γ,n cu proprietatea că $\alpha+\beta+\gamma=7$ și $\alpha\cdot\frac{a^n}{b}+\beta\cdot\frac{b^n}{c}+\gamma\cdot\frac{c^n}{a}\geq 7a, \forall a,b,c>0$.

Gheorghe Marchitan

Soluție: Deoarece vrem ca inegalitatea să fie verificată pentru orice numere reale pozitive a,b,c putem considera $a=b=c>0$. Deducem că $a^{n-1}\geq a, \forall a>0$, de unde $n=2$.

Aplicând inegalitatea mediilor pentru expresia din membrul stâng, privită ca o sumă de 7 numere pozitive (din care α sunt egale cu $\frac{a^2}{b}$, β egale cu $\frac{b^2}{c}$ și γ egale cu $\frac{c^2}{a}$), obținem $\alpha\frac{a^2}{b}+\beta\frac{b^2}{c}+\gamma\frac{c^2}{a}\geq 7\sqrt[7]{\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\alpha}\left(\frac{b^2}{c}\right)^{\beta}\left(\frac{c^2}{a}\right)^{\gamma}}=7\sqrt[7]{a^{2\alpha-\gamma}b^{2\beta-\alpha}c^{2\gamma-\beta}}$. Pentru a avea loc inegalitatea cerută, este suficient ca membrul drept al inegalității, adică $7a$, să coincidă cu membrul drept obținut din inegalitatea mediilor, respectiv $7\sqrt[7]{a^{2\alpha-\gamma}b^{2\beta-\alpha}c^{2\gamma-\beta}}$. Rezultă că $2\alpha-\gamma=7, 2\beta-\alpha=0, 2\gamma-\beta=0$. Deducem că $\alpha=4,\beta=2,\gamma=1$ reprezintă o condiție suficientă de a fi verificate cerințele: $\alpha+\beta+\gamma=7$ și $\alpha\cdot\frac{a^2}{b}+\beta\cdot\frac{b^2}{c}+\gamma\cdot\frac{c^2}{a}\geq 7a, \forall a,b,c>0$ (din inegalitatea mediilor).

Rămâne de analizat dacă $\alpha=4,\beta=2,\gamma=1$ este și o condiție necesară (altfel spus dacă nu există și alte soluții (α,β,γ) pentru care să se verifice inegalitatea cerută). Considerăm $c=a$ și $\gamma=7-\alpha-\beta$ în inegalitatea cerută. Obținem $\alpha\frac{a^2}{b}+\beta\frac{b^2}{a}+(7-\alpha-\beta)a\geq 7a$. Efectuând calculele găsim $(a-b)\left(\alpha a^2-\beta ab-\beta b^2\right)\geq 0, \forall a,b>0$. Observăm că, dacă $a<b$ atunci $\alpha a^2-\beta ab-\beta b^2\leq 0$, iar dacă $a>b$ atunci $\alpha a^2-\beta ab-\beta b^2\geq 0$. Deducem că funcția de gradul doi în *a*, $f(a)=\alpha a^2-\beta ab-\beta b^2$ își schimbă semnul în *b*, adică $f(b)=0$. Rezultă $\alpha=2\beta$. Cu același raționament pentru $b=a$ și $\alpha=7-\beta-\gamma$ găsim că $\beta=2\gamma$. Din $\alpha+\beta+\gamma=7$, $\alpha=2\beta$, $\beta=2\gamma$ deducem că $\alpha=4,\beta=2,\gamma=1$, finalizând demonstrarea necesității ca $(\alpha,\beta,\gamma)=(4,2,1)$.

Barem:

Obține $n=2$	2p
Demonstrează suficiența ca $(\alpha,\beta,\gamma)=(4,2,1)$	3p
Demonstrează necesitatea ca $(\alpha,\beta,\gamma)=(4,2,1)$	2p

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.