BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a XI-a

1. a) Fie matricea $A \in M_n(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}$. Să se determine suma elementelor matricei A^2.

b) Se consideră o matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, având suma elementelor fiecărei linii egală cu $x \in \mathbb{R}$. Să se determine x, ştiind că $A^2 = I_n$.

Cristian Amorăriţei, Suceava

Barem:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & \ldots & 2n-1 \\ 0 & 2^2 & 5 & 7 & \ldots & 2n-1 \\ 0 & 0 & 3^2 & 7 & \ldots & 2n-1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n^2 \end{pmatrix}$.	2p
Suma elementelor este $\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} (2k-1)(k-1)$	1p
Finalizare: suma este n^3	1p
b) Dacă $A^2 = (c_{ij})_{1 \le i, j \le n} \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$	1p
Suma elementelor matricei A^2 este $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} = x \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = nx^2$	1p
Finalizare $A^2 = I_n \Rightarrow nx^2 = n \Rightarrow \alpha \in \{-1, 1\}$. Observăm că matricele $I_n, -I_n$ au proprietăţile din enunţ.	1p

2. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ cu $A^3 = O_n$.

a) Să se arate că matricea $X = I_n + A + A^2$ este soluţie a ecuaţiei $X^3 = I_n + 3A + 6A^2$.

b) Să se arate că pentru orice $p \in \mathbb{N}^*, p \ge 2$ şi orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \alpha \ne 0$, ecuaţia $X^p = \alpha I_n + \beta A + \gamma A^2$ are cel puţin p soluţii.

Revista Sinus Nr. 3 (15)/2009

Barem:

a) $A^3 = O_n \Rightarrow A^k = O_n, \forall k \ge 3$	1p
Calculează $(I_n + A + A^2)^2 = I_n + 2A + 3A^2$	1p
Obţine $(I_n + A + A^2)^3 = I_n + 3A + 6A^2$	1p
b) Căutăm soluţii de forma $X = xI_n + yA + zA^2$. Arată inductiv că $X^k = x^k I_n + kx^{k-1} yA + \left(\frac{k(k-1)}{2} x^{k-2} y^2 + kx^{k-1} z \right) A^2, \forall k \in \mathbb{N}^*$.	2p
Dacă $\begin{cases} x^p = \alpha \\ px^{p-1} y = \beta \\ \frac{p(p-1)}{2} x^{p-2} y^2 + px^{p-1} z = \gamma \end{cases}$, atunci $X = xI_n + yA + zA^2$ este soluţie a ecuaţiei date.	1p
Finalizare: sistemul are p soluţii, deci ecuaţia dată are cel puţin p soluţii	1p

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n \ge 1}$ de numere reale nenule cu $x_1 = 1$. Arătaţi că, dacă $n^2 x_n^2 - (2n^2 - 1) x_n x_{n-1} + (n^2 - 1) x_{n-1}^2 \le 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2$, atunci $(x_n)_{n \ge 1}$ este convergent şi $\lim_{n \to \infty} x_n \ge \frac{1}{2}$.

Revista Sinus Nr. 3 (12)/2008

Barem:

Împarte relaţia prin x_{n-1}^2 şi deduce că $1 - \frac{1}{n^2} \le \frac{x_n}{x_{n-1}} \le 1, \forall n \ge 2$	2p
Demonstrează că $(x_n)_{n \ge 1}$ este cu termeni strict pozitivi, descrescător, deci convergent	2p
Înmulţeşte relaţiile $1 - \frac{1}{k^2} \le \frac{x_k}{x_{k-1}}$ pentru $k = \overline{1, n}$ şi obţine $x_n \ge \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \forall n \ge 2$	2p
Finalizare $\lim_{n \to \infty} x_n \ge \frac{1}{2}$.	1p

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.