BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a XII-a

1. Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă neinjectivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se arate că pentru orice $\lambda>0$, există $c_1,c_2\in\mathbb{R}, c_1\neq c_2$ astfel încât $f(c_1)+\lambda f(c_2)=0$.

Revista Sinus Nr. 2-3 (20-21)/2011

Soluție. Din F neinjectivă rezultă că există $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ astfel încât $F(a)=F(b)$. Fie $c\in(a,b)$. Dacă aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalele $[a,c]$ și $[c,b]$ deducem că există $c_1\in(a,c)$, $c_2\in(c,b)$ cu $F(c)-F(a)=(c-a)f(c_1)$ și $F(b)-F(c)=(b-c)f(c_2)$.

Din aceste relații rezultă că $(c-a)f(c_1)+(b-c)f(c_2)=0$. (*) Vom determina c astfel încât $b-c=\lambda(c-a)\Leftrightarrow c=\dfrac{\lambda a+b}{1+\lambda}\in(a,b)$.

Relația (*) devine: $(c-a)f(c_1)+\lambda(c-a)f(c_2)=0\Leftrightarrow f(c_1)+\lambda f(c_2)=0$.

Barem:

Există $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ astfel încât $F(a)=F(b)$	2p
Există $c_1\in(a,c)$, $c_2\in(c,b)$ cu $F(c)-F(a)=(c-a)f(c_1)$ și $F(b)-F(c)=(b-c)f(c_2)$	2p
Obține $(c-a)f(c_1)+(b-c)f(c_2)=0$	1p
Determină $c=\dfrac{\lambda a+b}{1+\lambda}\in(a,b)$ astfel încât $b-c=\lambda(c-a)$	1p
Finalizare $f(c_1)+\lambda f(c_2)=0$	1p

2. Calculați $\int e^{\cos x}\left(\cos^2 x+\sin x\cos x+\cos x-1\right)dx,\ x\in\mathbb{R}$.

Gheorghe Marchitan

Soluție: Avem $I=\int e^{\cos x}\left(\cos^2 x+\sin x\cos x+\cos x-1\right)dx=\int e^{\cos x}\sin x\cos x dx+\int e^{\cos x}\left(\cos^2 x+\cos x-1\right)dx=I_1+I_2$. Apoi,

$$I_1=\int e^{\cos x}\sin x\cos x dx=\int \cos x\cdot\left(-e^{\cos x}\right)'dx=-e^{\cos x}\cos x-\int(-\sin x)\cdot\left(-e^{\cos x}\right)dx=-e^{\cos x}\cos x+e^{\cos x}+\mathcal{C}.$$

De asemenea,

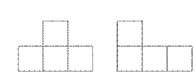
$$I_2=\int e^{\cos x}\left(\cos^2 x+\cos x-1\right)dx=\int e^{\cos x}\left(\cos x-\sin^2 x\right)dx=\int e^{\cos x}\cos x dx+\int \sin x\cdot\left(e^{\cos x}\right)'dx=$$
$$=\int e^{\cos x}\cos x dx+e^{\cos x}\sin x-\int e^{\cos x}\cos x dx=e^{\cos x}\sin x+\mathcal{C}.$$

Obținem $I=e^{\cos x}\left(\sin x-\cos x+1\right)+\mathcal{C}$.

Barem:

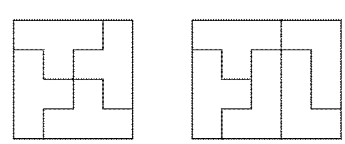
Scrie $I=I_1+I_2$	2p
Obține $I_1=-e^{\cos x}\cos x+e^{\cos x}+\mathcal{C}$	2p
Obține $I_2=e^{\cos x}\sin x+\mathcal{C}$	2p
Finalizare	1p

3. Se consideră un dreptunghi format din 4×2011 pătrate de latură 1 şi două tipuri de piese formate din câte 4 pătrate de latură 1: tipul 1 şi tipul 2, ca în figura alăturată. Să se arate că se poate acoperi dreptunghiul folosind piese de ambele tipuri, dar nu poate fi acoperit cu piese doar de un singur tip.



Marius Marchitan

Soluție: Pentru a arăta ca dreptunghiul poate fi acoperit cu piese de ambele tipuri observam că putem acoperi un pătrat 4×4 și un dreptunghi 4×5 cu piese de ambele tipuri ca în figura alăturată, iar $2011=4\cdot 4+5\cdot 399$. Deci dreptunghiul va fi acoperit cu 4 pătrate 4×4 și 399 dreptunghiuri 4×5.



Vom arăta în continuare că dreptunghiul dat nu poate fi acoperit numai cu piese de tipul 1. Pentru aceasta, să observăm mai întâi că pentru orice acoperire cu piese formate din 4 pătrate 1×1 sunt necesare 2011 piese. O modalitate de a arăta că nu se poate face o acoperire cu piese numai de tipul 1 este să colorăm dreptunghiul dat cu alb și negru, ca o tablă de șah. Observăm că o piesă de primul tip acoperă 3 pătrate albe și unul negru, sau 3 pătrate negre și unul alb. Cum în dreptunghi, numărul pătratelor albe este același cu cel al pătratelor negre, rezultă că numărul pieselor ce acoperă 3 pătrate albe și unul negru este același cu numărul pieselor ce acoperă trei pătrate negre și unul alb. În concluzie, numărul pieselor ce ar trebui folosite pentru o astfel de acoperire trebuie să fie par. Cum 2011 impar, nu există o astfel de acoperire pentru dreptunghiul dat. O altă soluție pentru a arăta același lucru este de a colora dreptunghiul folosind elemente ale grupului lui Klein, $K=\{e,a,b,c\}$, unde au loc egalitățile: $ab=ba=c, ac=ca=b, bc=cb=a$ și $x^2=e, \forall x\in K$ (cu e am notat elementul neutru). Vom face colorarea ca în figura alăturată și observăm că produsul elementelor acoperite de o piesă

a		a		a		…
	b		b		b	
a		a		a		…
	b		b		b	

de tipul 1 este *a* sau *b*. Atunci produsul tuturor elementelor din dreptunghi este, pe de o parte egal cu *e* (produsul pe fiecare coloană este *e*), iar pe de altă parte este $a^x \cdot b^y$, dacă sunt *x* piese cu produsul *a* și *y* piese cu produsul *b*. Dar $x + y = 2011$, deci unul din numerele *x* și *y* este par, iar celălalt impar. În consecință, $a^x \cdot b^y$ este sau *a* sau *b*, adică nu este *e*, ceea ce arată imposibilitatea acoperirii cu piese de tip 1.

Vom demonstra în continuare că nu poate fi făcută o acoperire a dreptunghiului dat cu piese de tipul 2. În cazul acesta, o colorare ca la șah nu conduce la rezultat. Vom apela la o colorare cu elemente ale grupului lui Klein, ca în figura alăturată. Să observăm că produsul tuturor elementelor din dreptunghiul dat este egal cu *e* (fiind *e* pe fiecare coloană). Ca în cazul anterior, produsul elementelor ce sunt acoperite de o piesă de tipul 2 este sau *a* sau *b*, deci nu se poate face o acoperire a dreptunghiului dat numai cu piese de tipul 2.

b	c	b	c	b	c	...
a	c	a	c	a	c	...
b	c	b	c	b	c	...
a	c	a	c	a	c	...

<u>*Barem:*</u>

Găsește o acoperire cu piese de ambele tipuri	3p
Arată că nu există acoperire cu piese de tip 1	2p
Arată că nu există acoperire cu piese de tip 2	2p

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.