CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN-TRIDENT "
Ediţia a IX-a , Secţiunea A (M_1), Brăila, 11 - 12. 11. 2011

CLASA a X a

1. Fie $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Să se arate că:

a) $|z_1|^2 + |z_2|^2 + ... + |z_n|^2 \geq \mathrm{Re}\left(z_1 z_2 + z_2 z_3 + ... + z_n z_1\right)$.

b) Dacă avem egalitate la a), atunci $z_1 + z_2 + ... + z_n \in \mathbb{R}$ şi $z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n \in \mathbb{R}$..

Gheorghe Alexe

***Soluţie*:**

a) Pentru $z_k = a_k + ib_k, a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1,n}$ $(1p)$

inegalitatea se scrie

$a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + ... + a_n^2 + b_n^2 \geq a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot a_3 - b_2 \cdot b_3 + ... + a_n \cdot a_1 - b_n \cdot b_1 \Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 +$

$+(a_2 - a_3)^2 + ... + (a_{n-1} - a_n)^2 + (a_n - a_1)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (b_2 + b_3)^2 + ... + (b_{n-1} + b_n)^2 + (b_n + b_1)^2 \geq 0, (A).(2p)$

b) Egalitatea conduce la $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$ şi la $b_1 + b_2 = 0, b_2 + b_3 = 0, ... b_n + b_1 = 0.$ $(1p)$

Obţinem $b_1 + b_2 + ... + b_n = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 + ... + z_n \in \mathbb{R}.$ $(1p)$ Dacă n este par atunci luând $a_1 = a, b_1 = b$

obţinem $z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = \left((a+ib)(a-ib)\right)^{\frac{n}{2}} = \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{n}{2}} \in \mathbb{R}$, iar pentru n impar obţinem $b_1 = 0$ şi deci

$b_k = 0, (\forall) k$ şi atunci $z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n \in \mathbb{R}.$ $(2p)$

2. Aflaţi $a, b, c > 1$ cu proprietăţile:

$$abc = 10^6 \text{ şi } \lg a \cdot \sqrt{\lg b \cdot \lg c} + \lg b \cdot \sqrt{\lg c \cdot \lg a} + \lg c \cdot \sqrt{\lg a \cdot \lg b} \geq 12.$$

Carmen şi Viorel Botea

***Soluţie*:**

Notăm $\lg a = x, \lg b = y, \lg c = z \Rightarrow x + y + z = 6.$ $(1p)$

Vom arăta că $\sqrt{xyz} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right) \leq 12$; din inegalitatea mediilor

$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \leq 8 \Rightarrow \sqrt{xyz} \leq 2\sqrt{2};$ $(2p)$ din inegalitatea C.B.S. avem

$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2 \leq 3(x+y+y)=18 \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq 3\sqrt{2}\,(2p) \Rightarrow \sqrt{xyz}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) \leq 12(1p) \Rightarrow$
egalitate $\Rightarrow x=y=z=2 \Rightarrow a=b=c=100.(1p)$

3. Fie $A=\left\{m\in\mathbb{N} \middle| m^2+2m+1000001 \text{ este pătrat perfect}\right\}$ şi A_1, A_2, A_3, A_4 astfel încât $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A.$

a) Să se determine $Card\ A$.

b) Să se arate că $(\exists)\, i \in \{1,2,3,4\}$ şi $(\exists)\, a,b \in A_i$, cu $a \neq b$ astfel încât $10 \mid a^4 - b^4$.

Gabriel Daniilescu

Soluţie:

a) Dacă $m^2+2m+1000001$ este un pătrat perfect, îl vom scrie sub forma $m^2+2m+1000001=n^2$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow (m+1)^2+1000000=n^2 \Leftrightarrow n^2-(m+1)^2=10^6 \Leftrightarrow \left[n-(m+1)\right]\cdot\left[n+(m+1)\right]=10^6$. $(1p)$

Deoarece $\left[n-(m+1)\right]+\left[n+(m+1)\right]=2n$, rezultă că cele două expresii au aceeaşi paritate şi cum produsul lor este 10^6, rezultă că sunt şi pare. În plus, $n-(m+1)<n+(m+1)$.

Prin urmare, avem:

$\begin{cases} n-(m+1)=2^{k_1}\cdot 5^{k_2} \\ n+(m+1)=2^{6-k_1}\cdot 5^{6-k_2} \end{cases}$, unde $k_1\in\{1,2,3,4,5\}\, k_2\in\{0,1,2,3,4,5,6\}.(2p)$

În plus, $2^{k_1}\cdot 5^{k_2}<2^{6-k_1}\cdot 5^{6-k_2}$, de unde rezultă că $2^{k_1}\cdot 5^{k_2}<1000$ şi $2^{6-k_1}\cdot 5^{6-k_2}>1000$. Numărul $10^6=2^6\cdot 5^6$ are 49 de divizori naturali, dintre care 24 sunt mai mici decât 1000. Aceştia sunt 1, 2, 3, 4 ,5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64, 80, 100, 125, 160, 200, 250, 320, 400, 500, 625, 800. $(1p)$

Dintre aceştia, 1, 5, 25, 125, 625 sunt impari, iar $64=2^6$, $320=2^6\cdot 5$. Rămân 17 cazuri favorabile pentru $n-(m+1)$. Pentru aceste 17 cazuri, obţinem $2(m+1)=2^{6-k_1}\cdot 5^{6-k_2}-2^{k_1}\cdot 5^{k_2}$, ceea ce este echivalent cu $m+1=2^{5-k_1}\cdot 5^{6-k_2}-2^{k_1-1}\cdot 5^{k_2}$. Deci $cardA=17.(1p)$

b) Presupunem prin absurd $cardA_i \leq 4$, $\forall i\in\{1,2,3,4\} \Rightarrow card\left(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\right)\leq 16$, fals. Deci $\exists i\in\{1,2,3,4\}$ astfel încât $cardA_i \geq 5.(1p)$ Dacă notăm ultima cifră a unui număr n cu $u(n)$, avem în general $u\left(n^2\right)\in\{0,1,4,5,6,9\}$ şi $u\left(n^4\right)\in\{0,1,5,6\}$. Deoarece $cardA_i \geq 5$, $\exists a,b\in A_i$, cu $a\neq b$, astfel încât $u\left(a^4\right)=u\left(b^4\right)$, adică $10 \mid a^4-b^4$. $(1p)$