CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN -TRIDENT "
Ediţia a IX-a , Secţiunea B (M_2),
Brăila, 11 - 12.11. 2011

Barem de corectare

CLASA a X a

1. Se consideră numărul real $a=\sqrt[3]{4+\sqrt{8}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{8}}$.

i) Să se verifice relaţia $a^3-6a-8=0$.

ii) Să se calculeze $\log_2\left(a^2-6\right)+\log_a\left(\frac{8}{a}+6\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a}\right)$.

***

Soluţie:

i) $a^3=4+\sqrt{8}+4-\sqrt{8}+3a\sqrt[3]{\left(4+\sqrt{8}\right)\cdot\left(4-\sqrt{8}\right)}$ 1p

$a^3=8+3a\sqrt[3]{16-8}\ \Rightarrow a^3-6a-8=0$ 2p

ii) $a^3-6a-8=0\Rightarrow a^2-6=\frac{8}{a}\Rightarrow a^2=\frac{8}{a}+6$ 2p

$\log_2\left(\frac{8}{a}\right)+\log_a a^2+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{a}=3-\log_2 a+2+\log_2 a=5$ 2p

Total 7 p

2. Să se afle numerele reale x şi y astfel încât:

$$\sqrt{x^2+y^2+10x-4y+29}+\sqrt{x^2+y^2-10x+4y+29}\le 2\sqrt{29}.$$

Carmen şi Viorel Botea

Soluţie:

$\sqrt{\left(x+5\right)^2+\left(y-2\right)^2}+\sqrt{\left(x-5\right)^2+\left(y+2\right)^2}\le 2\sqrt{29}$ 1p

Fie $A\left(-5,2\right),B\left(5,-2\right),M\left(x,y\right)$. Avem $MA+MB\ge AB$, $AB=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$ 2p

Conform enunţului, avem $MA+MB\le AB$. Egalitatea are loc când $M\in\left[AB\right]$, adică:

$\frac{y-2}{x+5}=\frac{y+2}{x-5}\Rightarrow x=\frac{-5y}{2}\in\left[-5,5\right]$ 3p

Deci $y\in\left[-2,2\right]$ 1p

Total 7 p

3. Avem la dispoziţie un număr nelimitat de jetoane pe care sunt scrise numerele 5, 7 sau 11. Un număr $n\in \mathbb{N}^*$ se numeşte **simpatic** dacă găsim un număr de jetoane astfel încât suma numerelor scrise pe ele să fie egală cu *n*.

a) Demonstraţi că numărul 13 nu este **simpatic**.

b) Arătaţi că numerele:14, 15, 16, 17 şi 18 sunt **simpatice**.

c) Demonstraţi că orice număr natural $n\geq 14$ este **simpatic**.

***

Soluţie:

Fie x, y, z numărul jetoanelor pe care sunt scrise numerele 5,7, respectiv 11.

a) $5x+7y+11z\neq 13,\ \forall x, y, z\in \mathbb{N}\Rightarrow$ numărul 13 nu este **simpatic**...2p

b) $14=2\cdot 7;15=3\cdot 5;16=1\cdot 5+1\cdot 11;17=2\cdot 5+1\cdot 7;18=1\cdot 7+1\cdot 11$ $\Rightarrow$ 14, 15, 16, 17, 18 sunt numere **simpatice**...2p

14 - **simpatic** $\Rightarrow$ 19 - **simpatic** $(19=1\cdot 5+2\cdot 7)$

15 - **simpatic** $\Rightarrow$ 20 - **simpatic** $(20=4\cdot 5)$...1p

c) 16 - **simpatic** $\Rightarrow$ 21 - **simpatic** $(21=2\cdot 5+1\cdot 11)$

17 - **simpatic** $\Rightarrow$ 22 - **simpatic** $(22=3\cdot 5+1\cdot 7)$

18 - **simpatic** $\Rightarrow$ 23 - **simpatic** $(23=1\cdot 5+1\cdot 7+1\cdot 11)$ 1p

Deci, din n - **simpatic**, deducem că şi $(n+5)$ este **simpatic** şi în mod inductiv, rezultă că orice număr natural $n\geq 4$ este **simpatic.**...1p

Total 7 p