CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN -TRIDENT "
Ediţia a IX-a , Secţiunea A (M_1), Brăila, 11 - 12. 11. 2011

CLASA a XI a

1. Fie

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 25 & \frac{1}{25} \\ \frac{1}{25} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Să se determine $A^n, n\ge 1$.

b) Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $2^n Tr\left(A^n\right)=\left(Tr\left(A\right)\right)^n$.

Gabriel Daniilescu

Soluţie:

a) Vom calcula A^n pentru $A=\begin{pmatrix} 2^x & 5^x & 5^{-x} \\ 5^{-x} & 2^x & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$.

Scriem matricea A sub forma $A=2^x\cdot I_3+B$, unde $B=\begin{pmatrix} 0 & 5^x & 5^{-x} \\ 5^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.(1p)$

Vom calcula în continuare B^2 pentru a determina forma generală a lui B^n şi avem:

$$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 5^x & 5^{-x} \\ 5^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5^x & 5^{-x} \\ 5^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5^{-2x} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5^{-2x} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5^x & 5^{-x} \\ 5^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5^x & 5^{-x} \\ 5^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=B$$

Din aceste calcule intermediare, deducem că $B^n=B$, pentru $n=2k+1$, şi $B^n=B^2$, pentru $n=2k+1,(\forall)k\in\mathbb{N}^*,(1p)$

Prin urmare, matricea A^n va avea forma următoare:

$$A^n=\left(2^x\cdot I_3+B\right)^n=C_n^0\cdot\left(2^x\right)^n\cdot I_3+C_n^1\cdot\left(2^x\right)^{n-1}\cdot B+C_n^2\cdot\left(2^x\right)^{n-2}\cdot B^2+C_n^3\cdot\left(2^x\right)^{n-3}\cdot B^3+...=\left(2^x\right)^n\cdot I_3+$$

$$+a_n\cdot B+b_n\cdot B^2,\text{ unde } a_n=C_n^1\left(2^x\right)^{n-1}+C_n^3\left(2^x\right)^{n-3}+C_n^5\left(2^x\right)^{n-5}+....,b_n=C_n^2\left(2^x\right)^{n-2}+C_n^4\left(2^x\right)^{n-4}+$$

$$+C_n^6\left(2^x\right)^{n-6}+....(1p)$$

Notăm $c_n=C_n^0\cdot\left(2^x\right)^n+b_n$

$$a_n+c_n=C_n^0\cdot\left(2^x\right)^n+C_n^1\cdot\left(2^x\right)^{n-1}+C_n^2\cdot\left(2^x\right)^{n-2}+C_n^3\cdot\left(2^x\right)^{n-3}+...=\left(2^x+1\right)^n$$

$$c_n-a_n=C_n^0\cdot\left(2^x\right)^n-C_n^1\cdot\left(2^x\right)^{n-1}+C_n^2\cdot\left(2^x\right)^{n-2}-C_n^3\cdot\left(2^x\right)^{n-3}+...=\left(2^x-1\right)^n$$

Scăzând şi adunând succesiv ultimele două relaţii ne rezultă că $2a_n=\left(2^x+1\right)^n-\left(2^x-1\right)^n$ şi

$2c_n=\left(2^x+1\right)^n+\left(2^x-1\right)^n$.Rezultă că $a_n=\frac{1}{2}\left[\left(2^x+1\right)^n-\left(2^x-1\right)^n\right]$ şi $c_n=\frac{1}{2}\left[\left(2^x+1\right)^n+\left(2^x-1\right)^n\right]$,

de unde deducem că $b_n=\frac{1}{2}\left[\left(2^x+1\right)^n+\left(2^x-1\right)^n\right]-\left(2^x\right)^n.\left(2p\right)$

Pentru $x=2$, obţinem $a_n=\frac{1}{2}\left(5^n-3^n\right),b_n=\frac{1}{2}\left(5^n+3^n\right)-4^n$ şi

$$A^n=4^n\cdot I_3+\frac{1}{2}\cdot\left(5^n-3^n\right)\cdot B+\frac{1}{2}\cdot\left(5^n+3^n-2\cdot4^n\right)\cdot B^2=4^n\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\frac{5^n-3^n}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&25&\frac{1}{25}\\\frac{1}{25}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{5^n+3^n-2\cdot4^n}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{1}{625}\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5^n+3^n}{2}&\frac{25\left(5^n-3^n\right)}{2}&\frac{5^n-3^n}{50}\\\frac{5^n-3^n}{50}&\frac{5^n+3^n}{2}&\frac{5^n+3^n-2\cdot4^n}{1250}\\0&0&4^n\end{pmatrix}\left(1p\right)$$

b) $TrA^n=\frac{5^n+3^n}{2}+\frac{5^n+3^n}{2}+4^n=5^n+3^n+4^n$

$2^n\cdot TrA^n=\left(TrA\right)^n\Leftrightarrow2^n\cdot\left(5^n+3^n+4^n\right)=12^n\Leftrightarrow3^n+4^n+5^n=6^n\Leftrightarrow\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n+\left(\frac{5}{6}\right)^n=1\Rightarrow$

$\Rightarrow n=3$ soluţie unică.$\left(1p\right)$

2. Fie şirul

$$\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}},\text{ cu } x_0,x_1\in\left(-k,k\right),k>0 \text{ şi } x_{n+2}=\frac{k^2\left(x_{n+1}-x_n\right)}{k^2-x_{n+1}\cdot x_n},\left(\forall\right)n\in\mathbb{N}.$$

a) Să se arate că şirul este mărginit.

b) Arătaţi că şirul $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este periodic şi precizaţi în ce condiţii este convergent.

Gheorghe Alexe, Gazeta Matematică

Soluţie:

a) Se poate arăta cu uşurinţă că $x_n \in (-k,k),(\forall)n\in\mathbb{N},(2p)$

b) Se poate arăta că: $\dfrac{x_{n+2}-k}{(x_{n+1}-k)(x_n+k)}=\dfrac{k}{k^2-x_{n+1}\cdot x_n}=\dfrac{x_{n+2}+k}{(x_{n+1}+k)(k-x_n)}$, de unde rezultă că $\dfrac{k-x_{n+2}}{k+x_{n+2}}\cdot\dfrac{k-x_n}{k+x_n}=\dfrac{k-x_{n+1}}{k+x_{n+1}}$. Fie $u_n=\dfrac{k-x_n}{k+x_n}>0,\ \forall n\in\mathbb{N}.(2p)$ Avem $u_{n+2}\cdot u_n=u_{n+1},(\forall)n\in\mathbb{N}$.
Se obţine

$u_6=u_0\Rightarrow u_{n+6}=u_n,(\forall)n\in\mathbb{N}$ şi deci $x_{n+6}=x_n,(\forall)n\in\mathbb{N}$ adică şirul este periodic de perioadă 6. $(2p)$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent $\Leftrightarrow x_0=x_1=...=x_5\Leftrightarrow x_0=0$ şi $x_1=0$ $(1p)$

3. Fie şirurile $(x_n)_n,(y_n)_n$, cu $x_0\geq 0, y_0\geq 0,\ x_{n+1}\geq\sqrt{x_ny_n}$ şi $y_{n+1}\geq\sqrt{\dfrac{x_n^2+y_n^2}{2}},(\forall)n\in\mathbb{N}.$

i) Daţi exemplu de şiruri ce îndeplinesc condiţiile din enunţ şi

a) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

ii) Arătaţi că dacă $x_0>0$ şi $y_0>0,$ atunci şirurile au limită şi limitele lor sunt egale.

Dan Negulescu

Soluţie:

i) $x_n=n$ şi $y_n=n,(\forall)n\geq 0$, verifică$(1p)$
$x_n=0$ şi $y_n=1,(\forall)n\geq 0$ verifică. $(1p)$

ii) Din $x_0>0$ şi $y_0>0$ rezultă că şi $x_n>0$ şi $y_n>0,(\forall)n\in\mathbb{N}^*$. Deoarece $\sqrt{\dfrac{x_n^2+y_n^2}{2}}\geq\sqrt{x_ny_n}$, obţinem că şi $y_{n+1}\geq\sqrt{x_ny_n},(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ $(1p)$. În continuare, $x_{n+1}y_{n+1}\geq\left(\sqrt{x_ny_n}\right)^2=x_ny_n,(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton crescător, adică are şi limită. $(1p)$ Dacă $x_ny_n\to\infty$, atunci criteriul majorării conduce la $x_{n+1}\to\infty$ şi $y_{n+1}\to\infty$, de unde rezultă şi concluzia. $(1p)$

Dacă $p_n=x_ny_n\to L$, cu $0<L<+\infty$, considerând $a_n=\dfrac{x_{n+1}}{\sqrt{p_n}}\geq 1$ şi $b_n=\dfrac{y_{n+1}}{\sqrt{p_n}}\geq 1,(\forall)n\geq 0$, obţinem
$a_nb_n=\dfrac{x_{n+1}y_n}{p_n}=\dfrac{p_{n+1}}{p_n}\to\dfrac{L}{L}=1$. Dar, $a_nb_n\geq a_n\geq 1$ şi $a_nb_n\geq b_n\geq 1,(\forall)n\geq 0$ şi atunci, cu criteriul „cleştelui”, obţinem $a_n\to 1$ şi $b_n\to 1$, de unde rezultă că $x_{n+1}\to\sqrt{L}$ şi $y_{n+1}\to\sqrt{L}$, ceea ce trebuia demonstrat. $(2p)$