CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN -TRIDENT "
Ediţia a IX-a , Secţiunea B (M_2),
Brăila, 11 - 12.11. 2011

Barem de corectare

CLASA a XI a

1. Se consideră mulţimea de matrice $M=\left\{A_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{pmatrix}\middle|\alpha\in R\right\}$.

a) Să se demonstreze că, $\forall A_\alpha, A_\beta\in M\Rightarrow A_\alpha\cdot A_\beta\in M$.

b) Să se calculeze matricea $A_\alpha^{\ n}$, $\forall A_\alpha\in M$.

c) Se defineşte funcţia $f:M\to\{z\in C \mid z_\alpha=\cos\alpha+i\sin\alpha\}$ prin $f(A_\alpha)=z_\alpha$. Să se arate că $f(A_\alpha A_\beta)=f(A_\alpha)\cdot f(A_\beta)$.

Soluţie:

a) $\forall A_\alpha, A_\beta\in M\Rightarrow A_\alpha\cdot A_\beta=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & 0 & \sin(\alpha+\beta)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\alpha+\beta) & 0 & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}=A_{\alpha+\beta}\in M$ 2p

b) $A_\alpha^{\ n}=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & 0 & \sin n\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin n\alpha & 0 & \cos n\alpha\end{pmatrix}$ - se demonstrează prin inducţie matematică.................. 3p

c) $f(A_\alpha A_\beta)=f(A_{\alpha+\beta})=z_{\alpha+\beta}=z_\alpha\cdot z_\beta=f(A_\alpha)\cdot f(A_\beta)$ ………………………………….. 2p

Total 7p

2. Să se afle $a\in\mathbb{R}$ astfel încât să existe şi să fie finită

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}+...+\sqrt{1+2011x}-a}{x}$$

şi în acest caz să se calculeze limita.

***

Soluţie:

Dacă $a\neq 2011$ atunci limita nu există. Rezultă $a=2011$ ………..............................1p

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}+...+\sqrt{1+2011x}-2011}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1+\sqrt{1+2x}-1+...+\sqrt{1+2011x}-1}{x}$$ 2p

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}+\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}+\ldots+\frac{\sqrt{1+2011x}-1}{x}\right)= \ldots\ldots\ldots\ldots 1\text{p}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{2011}{2}=503\cdot 2011 \ldots\ldots\ldots\ldots 3\text{p}$$

Total 7p

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ îndeplinind condiţiile

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y),(\forall)x,y\in\mathbb{R} \text{ şi } f(1)=e.$$

a) Demonstraţi că $f(x)=e^x,(\forall)x\in\mathbb{Z}.$

b) Arătaţi că $f(-1)+f(-2)+\ldots+f(-2011)<\frac{1}{e-1}.$

***

Soluţie:

a) din ipoteză $f(0)=1$ 1p

se demonstrează prin inducţie matematică $f(n)=e^n,\ \forall n\in N$ 2p

din $1=f(0)=f(n+(-n))=f(n)\cdot f(-n)$ rezultă că $f(-n)=e^{-n},\ \forall n\in N$

Concluzia: $f(x)=e^x,(\forall)x\in\mathbb{Z}.$ 1p

b) $f(-1)+f(-2)+\ldots+f(-2011)=e^{-1}+e^{-2}+e^{-3}+\ldots+e^{-2011}=$ 1p

$=\frac{1}{e-1}\left(1-\frac{1}{e^{2011}}\right)$ 1p

demonstrarea inegalităţii $\frac{1}{e-1}\left(1-\frac{1}{e^{2011}}\right)<\frac{1}{e-1}$ 1p

Total 7p