CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”
Ediţia a IX-a , Secţiunea A (M_1), Brăila, 11 - 12. 11. 2011

CLASA a XII a

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu $2n+1$ elemente cu proprietatea că există o funcţie $f:G\to G$ astfel încât $f\left(x\cdot f\left(xy\right)\right)=y\cdot f\left(x^2\right),(\forall)x,y\in G.$ Arătaţi că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

Gazeta Matematică

Soluţie:

Pentru $x=e$ obţinem $f\left(f\left(y\right)\right)=y\cdot f\left(e\right),\forall y\in G$,deci f este injectivă. Pentru $y=e(2p)$ rezultă că $f\left(x\cdot f\left(x\right)\right)=f\left(x^2\right)$ şi din injectivitatea lui f obţinem $x\cdot f\left(x\right)=x^2$, deci $f\left(x\right)=x,\forall x\in G(2p)$,. Relaţia din enunţ devine $x^2y=yx^2,(\forall)x,y\in G$, rezultă $x^{2n+2}y=yx^{2n+2},(\forall)x,y\in G$ şi cum $x^{2n+1}=e$, obţinem $xy=yx$, $\forall x,y\in G$. $(3p)$

2. Aflaţi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă $f\left(x\right)\left(x^2+1\right)=e^x\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+xF\left(x\right),(\forall)x\in\mathbb{R},$ unde F este o primitivă a lui f şi $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{F\left(x\right)-F\left(1\right)}{x-1}=\dfrac{3e}{\sqrt{2}}$. Apoi aflaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $f\left(x\right)=\dfrac{m}{\sqrt{x^2+1}}$ admite trei soluţii reale distincte.

Carmen şi Viorel Botea

Soluţie:

Relaţia din enunţ o rescriem sub forma $\dfrac{f\left(x\right)\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot F\left(x\right)}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}=e^x,\forall x\in\mathbb{R},\forall x\in G(1p)$ ceea ce este echivalent cu $\dfrac{f\left(x\right)\cdot\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot F\left(x\right)}{x^2+1}=e^x,\forall x\in G(1p)$, adică $\left(\dfrac{F\left(x\right)}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\left(e^x\right)',(\forall)x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că $\dfrac{F(x)}{\sqrt{x^2+1}}=e^x+C\Rightarrow F\left(x\right)=e^x\sqrt{x^2+1}+C\sqrt{x^2+1}.$ Prin urmare, avem $f\left(x\right)=e^x\sqrt{x^2+1}+\dfrac{e^x\cdot x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{C\cdot x}{\sqrt{x^2+1}}$, de unde putem scoate şi : $f\left(1\right)=e\sqrt{2}+\dfrac{e}{\sqrt{2}}+\dfrac{C}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}(1p)$ $\Rightarrow C=0,\Rightarrow f\left(x\right)=e^x\sqrt{x^2+1}+\dfrac{e^x\cdot x}{\sqrt{x^2+1}},(1p)$.Acum: $f\left(x\right)=\dfrac{m}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow e^x\left(x^2+1\right)+e^x\cdot x=m$.

Fie $g(x)=e^x(x^2+1)+e^x\cdot x-m,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-m$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=+\infty.(1p)$ $g'(x)=e^x(x^2+1)+2xe^x+e^x+xe^x=e^x(x^2+3x+2)$

Rezolvând ecuaţia $g'(x)=0$, obţinem

soluţiile $x=-1$ şi $x=-2$, $g(-1)=\frac{2}{e}-\frac{1}{e}-m=\frac{1}{e}-m$, $g(-2)=\frac{5}{e^2}-\frac{2}{e^2}-m=\frac{3}{e^2}-m$, $\frac{3}{e^2}>\frac{1}{e}=\frac{e}{e^2}$.

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$	
$g(x)$	$-m$	$\frac{3}{e^2}-m$	$\frac{1}{e}-m$	+	
$m\in(-\infty,0)$	+	+	+	+	nu există soluţii
$m=0$	0	+	+	+	nu există soluţii
$m\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$	-	+	+	+	1 soluţie
$m=\frac{1}{e}$	-	+	0	+	2 soluţii
$m\in\left(\frac{1}{e},\frac{3}{e^2}\right)$	-	+	-	+	3 soluţii
$m=\frac{3}{e^2}$	-	0	-	+	2 soluţii
$m\in\left(\frac{3}{e^2},\infty\right)$	-	-	-	+	1 soluţie

Deci $m\in\left(\frac{1}{e},\frac{3}{e^2}\right)$ $(3p)$

3. Considerăm mulţimile de trinoame
$M=\left\{X^2+aX+b \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}, G=\left\{X^2+aX+b \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0\right\}$ şi "operaţia"

$$\left(X^2+a_1X+b_1\right)\bullet\left(X^2+a_2X+b_2\right)=X^2+(a_1+a_2)X+b_1b_2.$$

a) Arătaţi că $(M,\bullet)$ este monoid comutativ şi determinaţi toate elementele neinversabile din M.

b) Arătaţi că $(G,\bullet)$ este grup abelian.

c) Rezolvaţi ecuaţia $\left(X^2+aX+b\right)^{2011}=X^2+X$ în M şi ecuaţia $\left(X^2+aX+b\right)^{-2012}=X^2+1$ în G.

Victoria şi Dan Negulescu

Soluţie:

a) Se verifică uşor axiomele monoidului, iar elementele neinversabile sunt $X^2+aX, a\in\mathbb{R}$,. $(3p)$

b) $(G,\cdot)$ este un monoid comutativ şi $\left(X^2+aX+b\right)^{-1}=X^2-aX+\frac{1}{b},(\forall)a\in\mathbb{R}$, şi $\forall b\in\mathbb{R}^*$, de unde rezultă că orice element este inversabil. $(2p)$

c) Prima ecuaţie devine $X^2 + 2011aX + b^{2011} = X^2 + X \Leftrightarrow 2011a = 1$ şi $b^{2011} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2011}$ şi $b = 0$, deci soluţia este $X^2 + \frac{1}{2011} \cdot X$. A doua ecuaţie devine $X^2 - (-2012a)X + b^{-2012} = X^2 + 1$ $\Leftrightarrow -2012a = 0$ şi $b^{2012} = 1 \Leftrightarrow a = 0$ şi $b = \pm 1$, deci are soluţiile $X^2 + 1$ şi $X^2 - 1$. $(2p)$