

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
 “ PETRU MOROȘAN -TRIDENT ”
 Ediția a IX-a , Secțiunea B (M₂),
 Brăila, 11 - 12.11. 2011**

Barem de corectare

CLASA a XII a

1. Fie $f : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\}(1 - \{x\})$ (unde $\{x\} = x - [x]$, reprezintă partea fracționară a numărului real).

- a) Să se calculeze $f(1)$.
- b) Să se demonstreze că funcția f este continuă în punctul $x_0 = 1$.
- c) Să se determine o primitivă a funcției f pe intervalul $(0, 2)$.

Soluție:

a) calcularea lui $f(1) = 0$ 1p

b) calculul limitelor laterale în 1: $l_s = l_d = 0$ și $f(1) = 0$
 rezultă funcția continuă în $x_0 = 1$ 3p

c) $f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x \in (0,1) \\ (x-1)(2-x), & x \in [1,2) \end{cases}$ 1p

$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c - 1, & x \in (0,1) \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + c, & x \in [1,2) \end{cases}$ 2p

Total 7p

2. Pe mulțimea numerelor reale, se definește legea de compoziție

$$x * y = 2011(xy - x - y) + 2012, (\forall) x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Demonstrați că mulțimea $(G, *)$ este grup comutativ, unde $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Rezolvați ecuația $x * x * x * x = 2011^7 + 1, x \in \mathbb{R}$.

Soluție:

- a) demonstrarea părții stabile.....1p
demonstrarea asociativității și comutativității.....1p
existența elementului neutru $e = \frac{2012}{2011} \in G$ 1p
orice element este simetrizabil cu simetricul $x' = \frac{1}{2011^2(x-1)} + 1 \in G$ 1p
- b) $x * y = 2011(x-1)(y-1) + 1 \Rightarrow x * x = 2011(x-1)^2 + 1$ 1p
 $x * x * x * x = 2011^3(x-1)^4 + 1$ 1p
 $2011^3(x-1)^4 + 1 = 2011^7 + 1 \Rightarrow S = \{-2010, 2012\}$ 1p

Total 7p

3. Programul EXCEL organizează datele sub forma unui tabel ale cărui linii sunt numerotate 1, 2, ..., 9, 10, 11, ..., 99, 100, 101, ... și ale cărui coloane sunt etichetate A, B, ..., Z, AA, AB, ..., ZY, ZZ, AAA, AAB, ... (sunt folosite cele 26 de litere ale alfabetului limbii engleze).

- a) A câta coloană este cea etichetată AAB ?
b) Care este eticheta celei de-a 2054 - a coloane ?

Soluție:

- a) Avem 26 coloane etichetate cu o literă și 26^2 coloane etichetate cu două litere. Coloana AAA este a $26 + 26^2 + 1 = 703$ -a coloană.....3p
- b) De la AAA la AZZ avem 676 coloane, de la BAA la BZZ încă 676 coloane. Astfel, coloana BZZ este a 2054 – a coloană.4p

Total 7p