CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN-TRIDENT "
Ediţia a IX-a , Secţiunea A (M_1),
Brăila, 11 - 12. 11. 2011

CLASA a V a

1. Numărul $\overline{abc}$ verifică următoarele condiţii:
i) $\overline{abc}$ împărţit la 5 dă restul 0;
ii) $\overline{abc}$ împărţit la n dă câtul 36 şi restul 1;
iii) $\overline{abc}$ împărţit la p dă câtul 32 şi restul 5.
Arătaţi că numerele n şi p sunt consecutive.

Nicolae Stănică

Soluţie:

$\overline{abc} = 36n + 1 = 32p + 5 \Rightarrow 9n = 8p + 1.$ $(1p)$

Analizând formele lui p obţinem $p = 9k + 1, k \in \mathbb{N}^*$. Obţinem $\overline{abc} = 288k + 37, k \in \mathbb{N}^*$. $(1p)$

Pentru $k = 1 \Rightarrow \overline{abc} = 325.$ $(1p)$

Pentru $k = 2 \Rightarrow \overline{abc} = 613.$ $(1p)$

Pentru $k = 3 \Rightarrow \overline{abc} = 901.$ $(1p)$

Dintre acestea, doar 325 verifica si prima conditie a problemei. $(1p)$

De aici avem $n = 9, p = 10.$ $(1p)$

2. În 48 de cutii sunt aşezate 102 bile astfel încât în fiecare sunt una, două sau trei bile. Se ştie că numărul cutiilor cu o bilă este mai mare decât 14, iar numărul total de bile din cutiile cu două sau trei bile este mai mare decât 86. Găsiţi numărul cutiilor cu o bilă, două bile şi trei bile.

Carmen şi Viorel Botea

Soluţie:

Fie a numărul cutiilor cu o bilă, b numărul cutiilor cu două bile şi c numărul cutiilor cu trei bile. $(1p)$ Avem

$a \geq 15; a+b+c = 48; 2b+3c \geq 87; (2p)\ a+2b+3c = 102 \Rightarrow a \leq 102-87 = 15 \Rightarrow a \leq 15 (1p) \Rightarrow a = 15 (1p) \Rightarrow$

$\Rightarrow b+c = 33$ şi $2b+3c = 87 \Rightarrow c = 87+66 \Rightarrow c = 21 (1p)$ şi $b = 33-21 \Rightarrow b = 12. (1p)$

3. Determinaţi numărul $\overline{abc}$, dacă a este pătrat perfect, c cifră pară şi $9\cdot\overline{abc}=\left(b+\overline{ac}\right)^2$.

Daniela Covaci

Soluţie:

$\left.\begin{array}{l} a \text{ pătrat perfect} \\ a \text{ cifră} \end{array}\right\} \Rightarrow a\in\{1,4,9\}(1p)$

$9\cdot\overline{abc}=\left(b+\overline{ac}\right)^2 \Rightarrow \overline{abc}$ pătrat perfect $\Rightarrow c\in\{0,1,4,5,6\}, c$ par $\Rightarrow c\in\{0,4,6\}$.

i) $c=0\Rightarrow 9\cdot\overline{ab0}=\left(b+\overline{a0}\right)^2$. Dacă $a=1\Rightarrow 9\cdot\overline{1b0}=\left(b+\overline{10}\right)^2\Rightarrow u\left[9\cdot\overline{1b0}\right]=0\Rightarrow u\left[\left(b+\overline{10}\right)^2\right]=0\Rightarrow$

$\Rightarrow b=0\Rightarrow 9\cdot 100=10^2.(Fals)$

Dacă $a=4\Rightarrow 9\cdot\overline{4b0}=\left(b+\overline{40}\right)^2\Rightarrow b=0\Rightarrow 9\cdot 400=40^2.(Fals)$

Dacă $a=9\Rightarrow 9\cdot\overline{9b0}=\left(b+\overline{90}\right)^2\Rightarrow b=0\Rightarrow 8100=8100.(Adevărat)\Rightarrow\overline{abc}=900.(2p)$

ii) Dacă $c=4\Rightarrow 9\cdot\overline{ab4}=\left(b+\overline{a4}\right)^2\Rightarrow u\left(9\cdot\overline{ab4}\right)=6\Rightarrow b=0,2.$

Dacă $b=0\Rightarrow 9\cdot\overline{a04}=\overline{a4}^2\Rightarrow 9\cdot 104=14^2.(Fals);9\cdot 404=44^2.(Fals);9\cdot 904=94^2.(Fals);$

Dacă $b=2\Rightarrow 9\cdot\overline{a24}=\left(2+\overline{a4}\right)^2\Rightarrow 9\cdot 124=16^2.(Fals);9\cdot 424=46^2.(Fals);9\cdot 924=96^2.(Fals);(2p)$

iii) Dacă $c=6\Rightarrow 9\cdot\overline{ab6}=\left(b+\overline{a6}\right)^2\Rightarrow u\left(9\cdot\overline{ab6}\right)=4\Rightarrow b=2,6.$

Dacă $b=2\Rightarrow 9\cdot\overline{a26}=\left(2+\overline{a6}\right)^2\Rightarrow 9\cdot 126=18^2.(Fals);9\cdot 426=48^2.(Fals);9\cdot 926=98^2.(Fals);$

Dacă $b=6\Rightarrow 9\cdot\overline{a66}=\left(6+\overline{a6}\right)^2\Rightarrow 9\cdot 166=22^2.(Fals);9\cdot 466=52^2.(Fals);9\cdot 966=102^2.(Fals);(1p)$