CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN-TRIDENT "
Ediţia a IX-a , Secţiunea A (M_1), Brăila, 11 - 12. 11. 2011

CLASA a VI - a

1. O cutie cu 30 de batoane de ciocolată costă 11 lei şi 10 bani. Să se afle preţul cutiei goale dacă este mai mare decât preţul unui baton de ciocolată şi mai mic decât preţul a două batoane. Justificaţi răspunsul.

Victoria şi Dan Negulescu

***Soluţie*:**

Dacă x este preţul unui baton de ciocolată, în bani obţinem: $31x < 1110 < 32x$, $(1p)$ de unde $x < \frac{1110}{31} < 36$ $(2p)$ şi $x > \frac{1110}{31} > 34$ $(2p)$ de unde $x = 35$ de bani $(1p)$. Atunci preţul cutiei este de $1110 - 1051 = 60$ de bani. $(1p)$

2. a) Fie $a \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\frac{2009^a + 2011^a}{2009^{a-1} + 2011^{a-1}}$ este număr natural. Arătaţi că $\frac{2009^a + 2011^a}{2009^{a-1} + 2011^{a-1}} = 2010.$

b) Determinaţi valoarea expresiei $\frac{3m+2n}{7n+8p}$, ştiind că $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ şi că numerele

$$\frac{2009^m + 2011^m}{2009^{m-1} + 2011^{m-1}}, \frac{2010^n + 2012^n}{2010^{n-1} + 2012^{n-1}} \text{ şi } \frac{2011^p + 2013^p}{2011^{p-1} + 2013^{p-1}}$$

sunt numere naturale.

Gazeta matematică

***Soluţie*:**

a) Avem $2009\left(2009^{a-1} + 2011^{a-1}\right) = 2009^a + 2009 \cdot 2011^{a-1} < 2009^a + 2011^a$. De aici rezultă

$2009 < \frac{2009^a + 2011^a}{2009^{a-1} + 2011^{a-1}}, (1).$ $(1p)$

Acum, $2011\left(2009^{a-1} + 2011^{a-1}\right) = 2011^a + 2011 \cdot 2009^{a-1} > 2009^a + 2011^a$. De aici rezultă

$2011 > \frac{2009^a + 2011^a}{2009^{a-1} + 2011^{a-1}}, (2).$ $(1p)$ Cum $\frac{2009^a + 2011^a}{2009^{a-1} + 2011^{a-1}}$ este număr natural, din $(1), (2)$ rezultă $\frac{2009^a + 2011^a}{2009^{a-1} + 2011^{a-1}} = 2010.$ $(1p)$

b) Din punctul a) deducem că

$\frac{2009^m+2011^m}{2009^{m-1}+2011^{m-1}}=2010$ sau $2009^m+2011^m=2010\cdot 2009^{m-1}+2010\cdot 2011^{m-1}$. Ultima relaţie se mai scrie

$2011^{m-1}(2011-2010)=(1p)2009^{m-1}(2010-2009)$ sau $2011^{m-1}=2009^{m-1}(1p)\Leftrightarrow\left(\frac{2011}{2009}\right)^{m-1}=1$.

De aici $m-1=0\Rightarrow m=1$. Analog găsim $n=1$ şi $p=1.(1p)$ Deci ,expresia este egală cu $\frac{1}{3}(1p)$

3. Fie $M_1,M_2,M_3,...,M_n$ puncte coliniare în acestă ordine astfel încât:

$$M_1M_2=9;M_2M_3=17;M_3M_4=33;M_4M_5=65;...;M_{n-1}M_n$$

a) Aflaţi lungimea segmentului M_8M_9.

b) Aflaţi $n\in\mathbb{N}$ dacă $M_1M_n=8194$.

c) Aflaţi lungimea segmentului M_2A unde A este mijlocul segmentului M_7M_9.

Daniela Tilincă şi Mihailă Adriana

***Soluţie*:**

a)$M_nM_{n+1}=2^{n+2}+1;(1p)M_8M_9=2^{10}+1=1025(1p)$

b)$M_1M_n=M_1M_2+M_2M_3+M_3M_4+...+M_{n-1}M_n=(2^3+1)+(2^4+1)+...+(2^{n+1}+1)=2^{n+2}-2^3+n-1=$
$=8194.(1p).2^{n+2}+n=8203(1p),2^{13}+2=8194\Rightarrow n=11.(1p)$

c)$M_2A=M_2M_7+M_7M_9:2=(2^4+1)+(2^5+1)+(2^6+1)+(2^7+1)+(2^8+1)+[(2^9+1)+(2^{10}+1)]:2=$
$=(2^9-2^4)+5+2^8+2^9+1=1270(2p)$