CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN-TRIDENT "
Ediţia a IX-a , Secţiunea A ($\mathbf{M_1}$),
Brăila, 11 - 12. 11. 2011

CLASA a VII a

1. Cifra zecilor unui pătrat perfect S este cu 2 mai mare decât cifra unităţilor lui S. Aflaţi toate resturile posibile când S este împărţit la 25.

Carmen şi Viorel Botea

Soluţie:

Cifra unităţilor lui S este din mulţimea $\{0,1,4,5,6,9\}(1p) \Rightarrow S$ are ultimele două cifre şi $\overline{...20}, \overline{...31}, \overline{...64}, \overline{...75}, \overline{...86}, (1p)$ $S=\overline{...20} \vdots 10, S \not\vdots 10^2$, $Fals(1p)$; $S=\overline{...31}=M_4+3$ nu este pătrat perfect; $(1p)$ $S=\overline{...75}=M_4+3$ nu este pătrat perfect;$(1p)$ $S=\overline{...86} \vdots 2$ şi $S \not\vdots 4$ deci $S=\overline{...64}, (1p)$ de exemplu $S=64=8^2$ sau $S=11664=108^2$. Împărţind S la 25, obţinem restul 14.$(1p)$

2. Prelungim latura $[CB]$ a triunghiului ABC astfel încât $DB=AB$ şi $B \in (CD)$. Fie M mijlocul lui $[AC]$. Bisectoarea unghiului $\measuredangle(ABC)$ intersectează DM în P. Arătaţi că $\measuredangle(BAP) \equiv \measuredangle(ACB)$.

***

Soluţie:

Ducem $BF \parallel CA, BF \cap AD=\{F\}(1p), BF \cap DM=\{E\}; \measuredangle(BDF)=\measuredangle(BAD)=\dfrac{\measuredangle(ABC)}{2}=\measuredangle(PBC)(1p) \Rightarrow$
$\Rightarrow FD \parallel BP(1p) \Rightarrow \measuredangle(DFE)=\measuredangle(PBE)(1p)$. M mijlocul lui $[AC] \Rightarrow$ E mijlocul lui $[FB] \Rightarrow FE=EB(1p) \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle DEF=\triangle PBE \Rightarrow FD=BP(1p) \Rightarrow \triangle BDF=\triangle ABP \Rightarrow \measuredangle(BAP)=\measuredangle(DBF)=\measuredangle(ACB).(1p)$

3. Se consideră $x_1, x_2, x_3, ..., x_{2012} \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_{2012}=1$ şi $x_1+x_2+x_3+...+x_{2012}=S$.

a) Arătaţi că S este un număr întreg divizibil cu 4.

b) Dacă $-2012<S<2012$, calculaţi produsul

$$P=\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\cdot ... \cdot\left(x_{2011}+\frac{1}{x_{2012}}\right)\cdot\left(x_{2012}+\frac{1}{x_1}\right).$$

Marius Damian

Soluţie:

a) Din $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{2012} = 1$ deducem că factorii sunt egali cu 1 sau cu $-1.(1p)$ Mai mult, factorii egali cu 1 sunt în număr par, iar cei egali cu -1, de asemenea, în număr par. $(1p)$ Prin urmare,

$$S = \underbrace{1+\ldots+1}_{\text{de } 2k \text{ ori } 1} + \underbrace{(-1)+\ldots+(-1)}_{\text{de } (2012\text{-}2k) \text{ ori } (-1)} = 2k \cdot 1 + (2012\text{-}2k)\cdot(-1) = 4k - 2012 \,\vdots\, 4.\ (1p)$$

b) Ţinând cont că $-2012 < S < 2012,$ rezultă că numerele $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2012}$ nu pot fi toate egale cu 1 sau toate egale cu $-1.(1p)$ Există atunci două numere consecutive în secvenţa $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2012}$ care au semne opuse; fie acestea $x_m = 1$ şi $x_{m+1} = -1.\ (2p)$

În final $P = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left(x_m + \frac{1}{x_{m+1}}\right)}_{=0} \cdot \ldots \cdot \left(x_{2012} + \frac{1}{x_1}\right) = 0.\ (1p)$