# CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
# " PETRU MOROȘAN-TRIDENT "
# Ediția a IX-a , Secțiunea A ($M_1$),
# Brăila, 11 - 12. 11. 2011

***CLASA a IX a***

**1.** Fie $p_n$ al $n-$lea număr prim.

a) Arătați că $p_n > 3n, (\forall) n \geq 12.$

b) Aflați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p_1 + p_2 + ... + p_n < 198.$

***Prelucrare Carmen și Viorel Botea***

***Soluție*: 0**

a)Considerăm $P(n): "p_n > 3n, (\forall) n \geq 12." P(12): p_{12} > 36, p_{12} = 37 > 36. (1p)$ Presupunem $P(n)(A)$ și demonstrăm $P(n+1): p_{n+1} > 3(n+1)$. Avem $p_{n+1} \geq p_n + 2 \geq 3n+1+2 = 3(n+1) \Rightarrow p_{n+1} \geq 3(n+1)$.
Nu putem avea egalitate deoarece $3(n+1) \vdots 3$ și nu este prim. $(3p)$

b) $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17, p_8 = 19, p_9 = 23, p_{10} = 29, p_{11} = 31.$

Observăm că $p_k < 3k, (\forall) k = \overline{1,11}, (2p) 198 = 3 \cdot \frac{11 \cdot 12}{2} = 3 \cdot (1+2+3+...+11) \Rightarrow n \in \{1,2,...,11\}; n \geq 13 \Rightarrow$
$p_1 + p_2 + ... + p_n \geq p_1 + p_2 + ... + p_{13} > 198,$ $p_1 + p_2 + ... + p_{12}$=197<198 deci, $n \in \{1,2,...,12\}.(1p)$

**2.** Se consideră numărul natural *n* și numărul natural prim și impar *p.*

a) Demonstrați că $p^3 - p$ este divizibil cu 24.

b) Demonstrați că dacă $\frac{5^{2n} - 1}{p^3 - p} \in (0,1)$, atunci $\frac{5^{2n} + 22}{p^3 - p} \in (0,1)$.

***Marius Damian***

***Soluție*:**

a) Avem $p^3 - p = (p-1)p(p+1)$, deci $p^3 - p$ este divizibil cu 3, fiind un produs de trei numere naturale consecutive. $(1p)$ Totodată, ținând cont că *p* este prim și impar, el are una și numai una din formele $M_4 + 1$ și $M_4 + 3$. $(1p)$ Prin urmare, $p^3 - p$ este divizibil cu 8. Fiind divizibil și cu 3, iar $(3,8) = 1$, deducem că este divizibil cu 24. $(1p)$

b) Mai întâi $5^{2n} - 1 = 25^n - 1 = (25-1)(25^{n-1} + 25^{n-2} + ... + 25 + 1) \Rightarrow 5^{2n} - 1 \vdots 24.$ $(1p)$
Folosind acum ipoteza, putem scrie

$$\frac{5^{2n}-1}{p^3-p} \in (0;1) \Rightarrow 5^{2n}-1 < p^3-p \Rightarrow (5^{2n}-1)-(p^3-p) < 0. \ (1p)$$

Cum $(5^{2n}-1)-(p^3-p) \ \vdots \ 24$, urmează $(5^{2n}-1)-(p^3-p) \le -24 < -23. \ (1p)$

În final $5^{2n}+22 < p^3-p \Rightarrow \frac{5^{2n}+22}{p^3-p} < 1$, deci $\frac{5^{2n}+22}{p^3-p} \in (0;1). \ (1p)$

**3.** În triunghiul $\Delta ABC$ notăm $B'$ mijlocul laturii $[AC]$ şi $C'$ mijlocul laturii $[AB]$ astfel încât

$$AC + 2BB' = AB + 2CC'$$

Să se arate că triunghiul $\Delta ABC$ este isoscel.

***Gazeta Matematică***

***Soluţie*:**

$b+2m_b = c+m_c \Rightarrow b^2+4m_b^2+4bm_b = c^2+4m_c^2+4cm_c \ (1p) \Rightarrow b^2+2(a^2+c^2)-b^2+4bm_b = c^2+$
$+2(a^2+b^2)-c^2+4cm_c \ (1p) \Rightarrow 2c^2+4bm_b = 2b^2+4cm_c \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2m_b = c-b+2m_c \\ c^2+2bm_b = b^2+2cm_c \end{cases} (1p) \Rightarrow b^2+2cm_c = b(c-b+2m_c)+c^2 \Rightarrow bc-b^2+2bm_c+c^2-2cm_c-b^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow b(c-b)+(c-b)(c+b)-2m_c(c-b) = 0 \Rightarrow (c-b)(b+c+b-2m_c) = 0 \ (1p) \Leftrightarrow c-b=0$ sau $2b+c-2m_c = 0$.

1. Dacă $c-b=0 \Rightarrow \triangle ABC$ este isoscel. $(1p)$

2. Dacă $2b+c-2m_c = 0 \Rightarrow 2b+c = 2m_c \Rightarrow 4m_c^2 = 4b^2+4bc+c^2 \Rightarrow 2(a^2+b^2)-c^2 = 4b^2+4bc+c^2 \Rightarrow$
$2a^2+2b^2-c^2 = 4b^2+4bc+c^2 \Rightarrow 2a^2+2b^2-c^2-4b^2-4bc-c^2 = 0 \Rightarrow 2a^2-2b^2-4bc-2c^2 = 0 \Rightarrow$
$a^2-(b+c)^2 = 0 \ (1p) \Rightarrow (a-b-c)(a+b+c) = 0$. Dacă $a-b-c=0$ sau $a+b+c=0 \Rightarrow a = b+c$ fals iar
$a+b+c > 0 \Rightarrow \triangle ABC$ isoscel $b=c$ soluţie. $(1p)$