CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN -TRIDENT ”
Ediţia a IX-a , Secţiunea B (M_2),
Brăila, 11 - 12.11. 2011

Barem de corectare

CLASA a IX a

1. Fie ABC un triunghi, punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ şi Q mijlocul segmentului (PM).

a) Arătaţi că : $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$.

b) Demonstraţi că punctele B, Q, N sunt coliniare şi calculaţi valoarea raportului $\frac{BQ}{QN}$.

***

Soluţie:

a) $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ 2p

$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BP}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$ 2p

b) $\overrightarrow{BQ}=\frac{3}{8}\overrightarrow{BN}$ 1p

B, Q, N coliniare...1p

$\frac{BQ}{BN}=\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{BQ}{QN}=\frac{3}{5}$ 1p

TOTAL 7p

2. Numerele reale pozitive $a_1, a_2, a_3, ..., a_{10}$ sunt, în această ordine, în progresie aritmetică de raţie $r>0$ şi $r\cdot a_1=18$. Determinaţi termenii progresiei astfel încât suma termenilor acesteia să fie minimă.

***

Soluţie:

$S=a_1+a_2+a_3+..........+a_{10}=5\cdot\left(a_1+a_{10}\right)$ 1p

$a_{10} = \frac{18}{r} + 9r$ 1p

VARIANTA 1

$S = 5 \cdot \left(9r + \frac{36}{r}\right) = 45 \cdot \left(r + \frac{4}{r}\right)$ 2p

$S = 45 \cdot \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{r}\right)^2 + 4\right]$ 1p

$S_{\min} = 180$ pentru $r = 2$ 1p

Rezultă: 9,11,13,15,17,19, 21, 23, 25,27..........1p

VARIANTA 2

$S = 45 \cdot \left(\frac{4}{r} + r\right) \geq 45 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{r} \cdot r} = 180$ (inegalitatea mediilor)..........1p

$S_{\min} = 180$ pentru $r = 2$ 1p

Rezultă: 9,11,13,15,17,19, 21, 23, 25,27..........1p

TOTAL 7p

3. Pe tablă este scris de douăzeci de ori numărul zecimal 1,1 şi de douăzeci numărul zecimal 1,11. Un elev a şters câteva numere dintre cele patruzeci aflate pe tablă. Stabiliţi câte numere a şters elevul, ştiind că suma numerelor rămase pe tablă este 19,93.

***

Soluţie:

Notăm cu x numărul numerelor 1,1 rămase şi cu y numărul numerelor 1,11 rămase.

$1{,}1 \cdot x + 1{,}11 \cdot y = 19{,}93 \Rightarrow 110x + 111y = 1993$

Calculând ultima cifră a lui y, deducem că aceasta este 3..........3p

Cum $y \leq 20 \Rightarrow y \in \{3, 13\}$

Verificând, reţinem doar valoarea $y = 13$, când $x = 5$.

Astfel, elevul a şters 15 de 1,1 şi 7 de 1,11, în total 22 de numere..........4p

TOTAL 7p