CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN -TRIDENT ”
Ediţia a IX-a , Secţiunea B (M_2),
Brăila, 11 - 12.11. 2011

CLASA a XI a

1. Se consideră mulţimea de matrice $M = \left\{ A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in R \right\}$.

a) Să se demonstreze că, $\forall A_\alpha, A_\beta \in M \Rightarrow A_\alpha \cdot A_\beta \in M$.

b) Să se calculeze matricea $A_\alpha^{\ n}$, $\forall A_\alpha \in M$.

c) Se defineşte funcţia $f : M \to \{ z \in C \mid z_\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha \}$ prin $f(A_\alpha) = z_\alpha$. Să se arate că $f(A_\alpha A_\beta) = f(A_\alpha) \cdot f(A_\beta)$.

2. Să se afle $a \in \mathbb{R}$ astfel încât să existe şi să fie finită

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+2x} + ... + \sqrt{1+2011x} - a}{x}$$

şi în acest caz să se calculeze limita.

***

3. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ îndeplinind condiţiile:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), (\forall) x, y \in \mathbb{R} \text{ şi } f(1) = e.$$

a) Demonstraţi că $f(x) = e^x, (\forall) x \in \mathbb{Z}.$

b) Arătaţi că $f(-1) + f(-2) + ... + f(-2011) < \dfrac{1}{e-1}.$

***

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.